Σημειώσεις για τις Κατατακτήριες Εξετάσεις Παιδαγωγικού της Δημ. Εκπαίδευσης

Θεωρία Συνόλων

Σωκράτης Σκλάβος, MSc., PhD.

Σύμβολα ενότητας

$\alpha < \beta$: το α είναι μικρότερο του β και το β είναι μεγαλύτερο του α

$\alpha \le \beta$: το α είναι μικρότερο ή ίσο του β και το β είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α

$\in$: ανήκει

$\notin$: Δεν ανήκει

$\subseteq$ Υποσύνολο

$\subset$ Γνήσιο υποσύνολο

$\varnothing$ Κενό σύνολο { }

$\Leftrightarrow$ Ισοδυναμία, δηλαδή συνεπαγωγή διπλής κατεύθυνσης

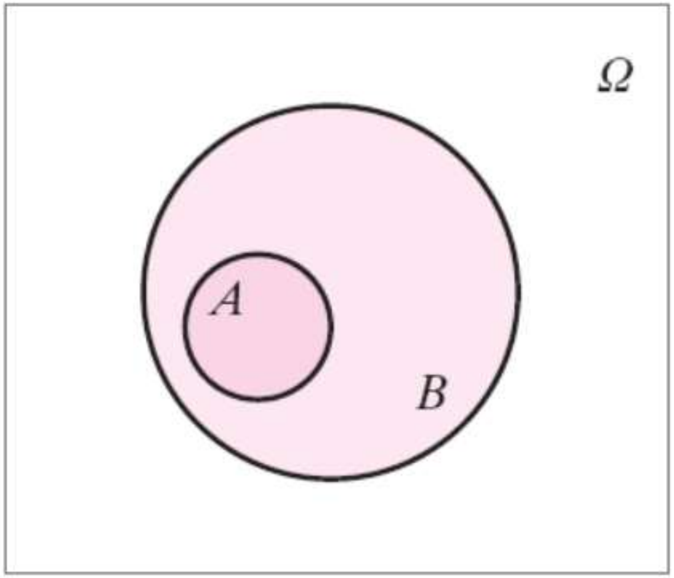
$|\ |$ πλήθος συνόλου

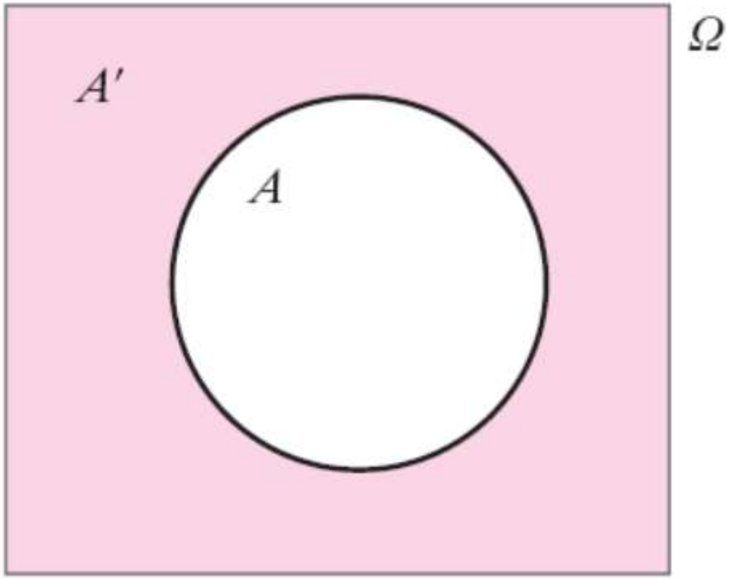
Ω = δειγματοχώρος = σύνολο όλων των πιθανών ενδεχομένων

A' = συμπλήρωμα του συνόλου A

$\cap$ = τομή

$\cup$ = ένωση





$$A \subseteq B$$

Παράδειγμα

A=Ε’ τάξη 14^{ου} Δημοτικού Σχολείου

Β=14^{ο} Δημοτικό Σχολείο

$$|A| \leq |B|$$

Α’ = συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α

$x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$

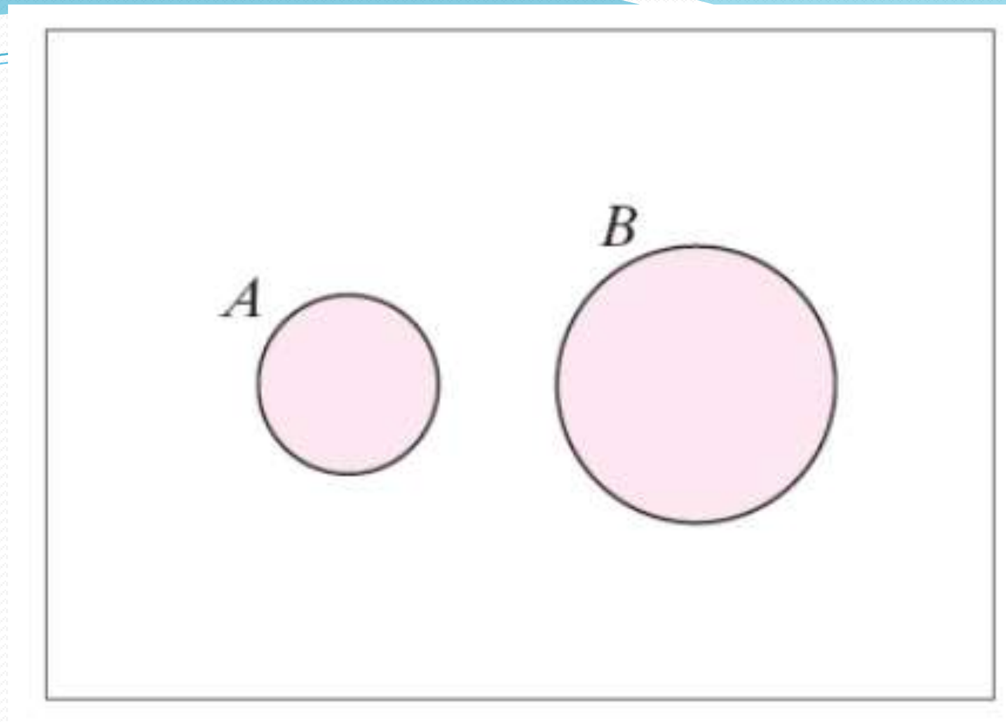
$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$

$A \cup A' = \Omega$

$A \cap A' = \varnothing = \{\ \}$

$$|A'| = |\Omega| - |A|$$

Ω

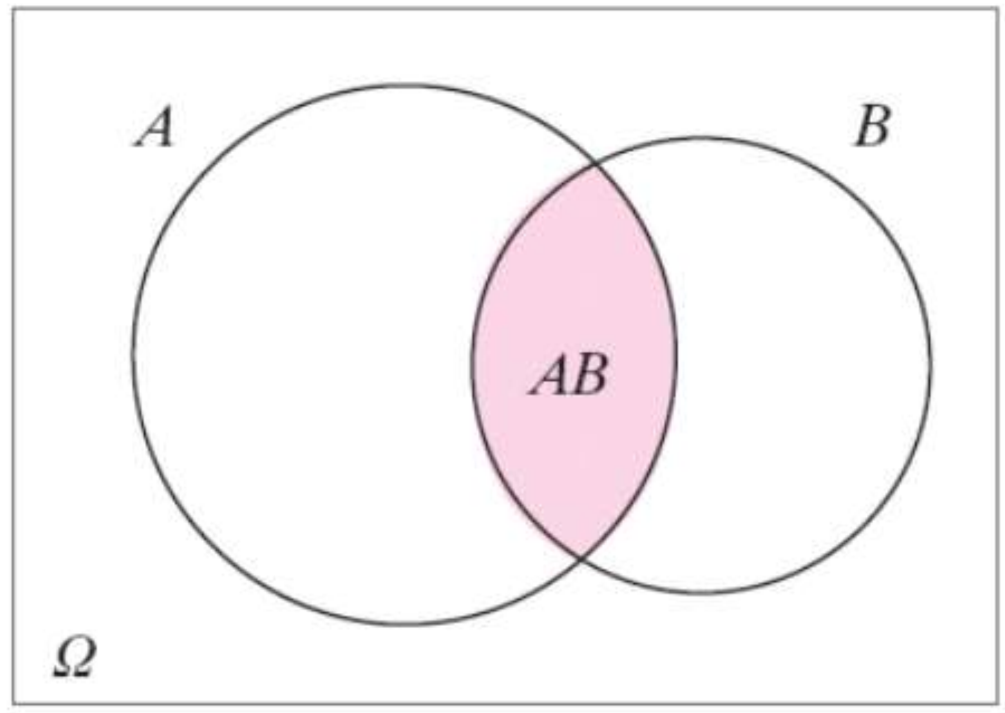


$$A \cap B = \varnothing, \quad A \subseteq \Omega, \; B \subseteq \Omega$$

A , B ασυσχέτιστα ή ξένα μεταξύ τους

Παράδειγμα
A = Μόνιμοι Κάτοικοι Πόλης Αθηνών
B = Μόνιμοι Κάτοικοι Πόλης Θεσσαλονίκης

synelixis

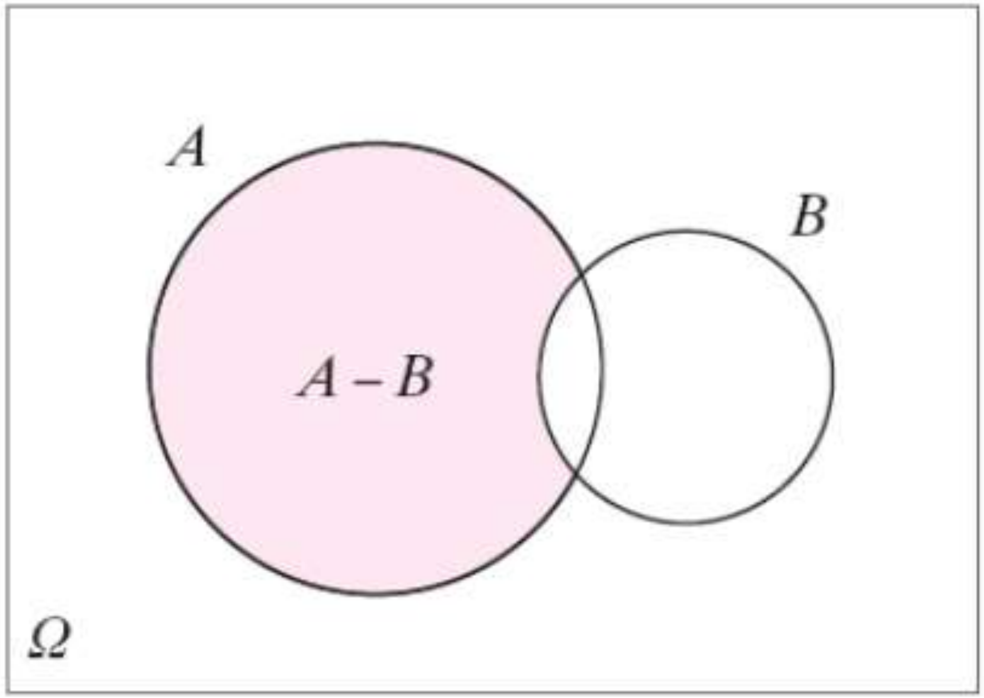


$|AB| \le |A|$
$|AB| \le |B|$

$AB = A \cap B$ = σύνολο κοινών στοιχείων των A και B

$x \in A$ και $x \in B \iff x \in A \cap B$

Παράδειγμα
A = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου
B = σύνολο παιδιών που μαθαίνουν μουσικό όργανο
AB = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου και μαθαίνουν μουσικό όργανο

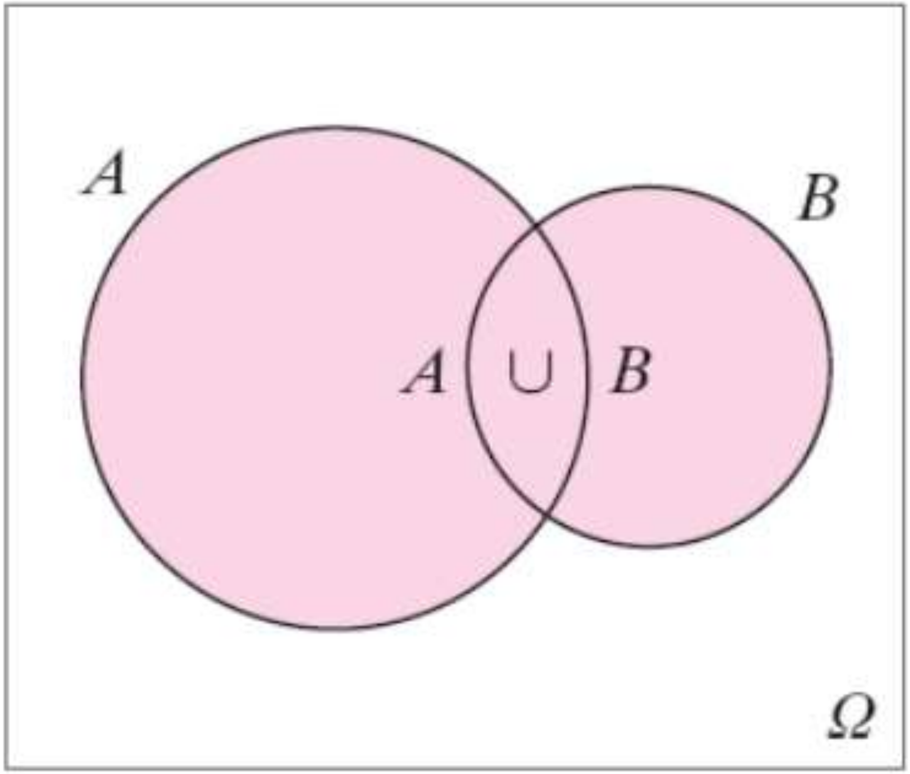


$|A\text{-}B| = |A| - |A \cap B|$

A-B = τα στοιχεία που ανήκουν στο A αλλά δεν ανήκουν στο B

$$x \in A \text{ και } x \notin B$$

Παράδειγμα
A = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου
B = σύνολο παιδιών που μαθαίνουν μουσικό όργανο
A-B = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου αλλά δεν μαθαίνουν μουσικό όργανο



$|A \cup B| =$

$|A - B| + |A \cap B| + |B - A| =$

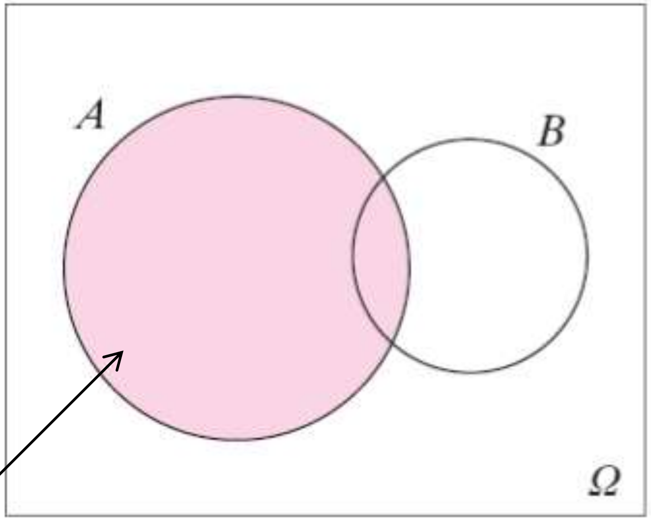
$|A| + |B| - |A \cap B|$

Ένωση ενδεχομένων $A \cup B = x \in A$ ή $x \in B$

Παράδειγμα
A = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου
B = σύνολο παιδιών που μαθαίνουν μουσικό όργανο
$A \cup B$ = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου ή μαθαίνουν μουσικό όργανο ή και τα δύο μαζί.

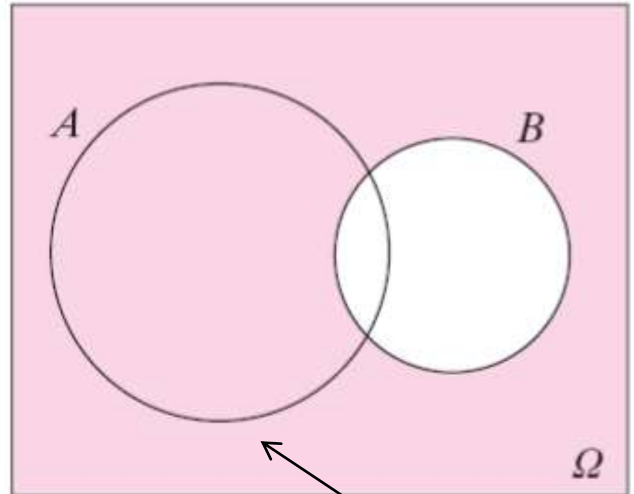
synelixis

$x \in A$



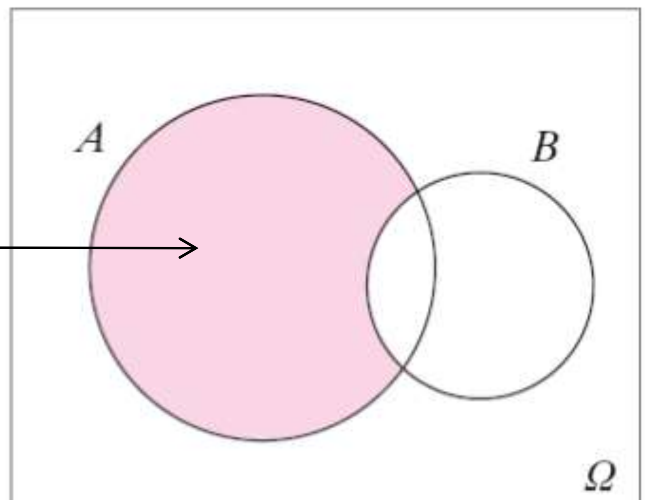
A = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα Του ποδοσφαίρου

$x \notin B$

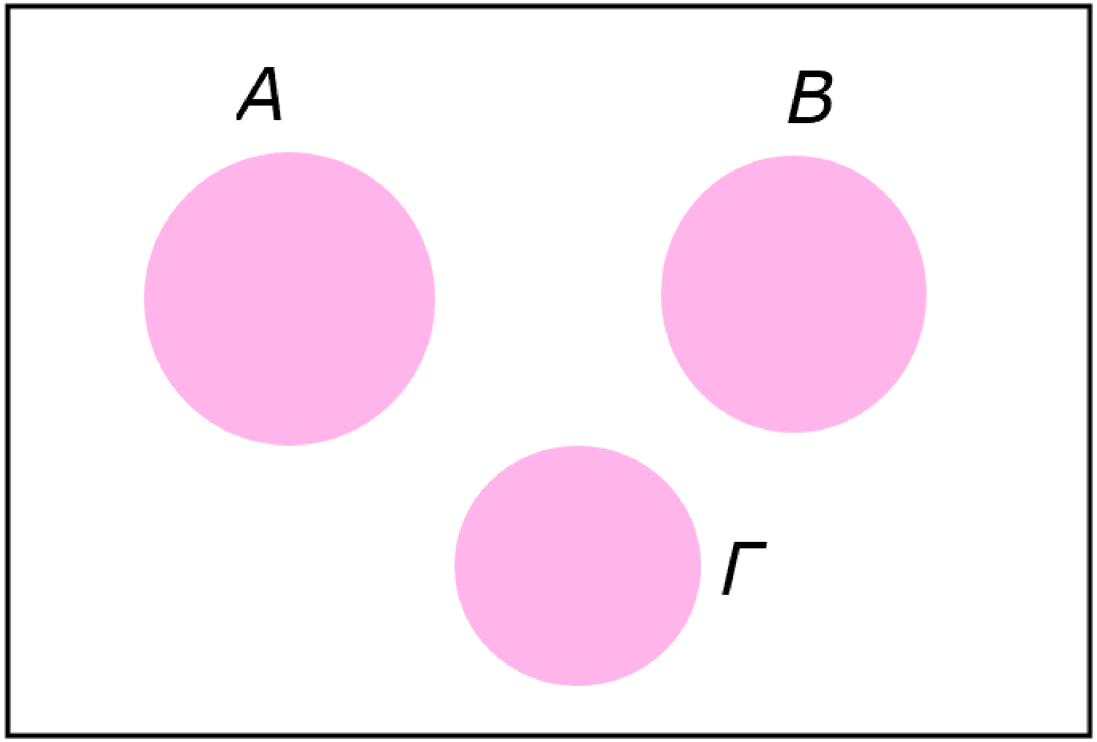


B’ = σύνολο παιδιών που **δεν** εκπαιδεύονται στη μουσική

$x \in A - B$

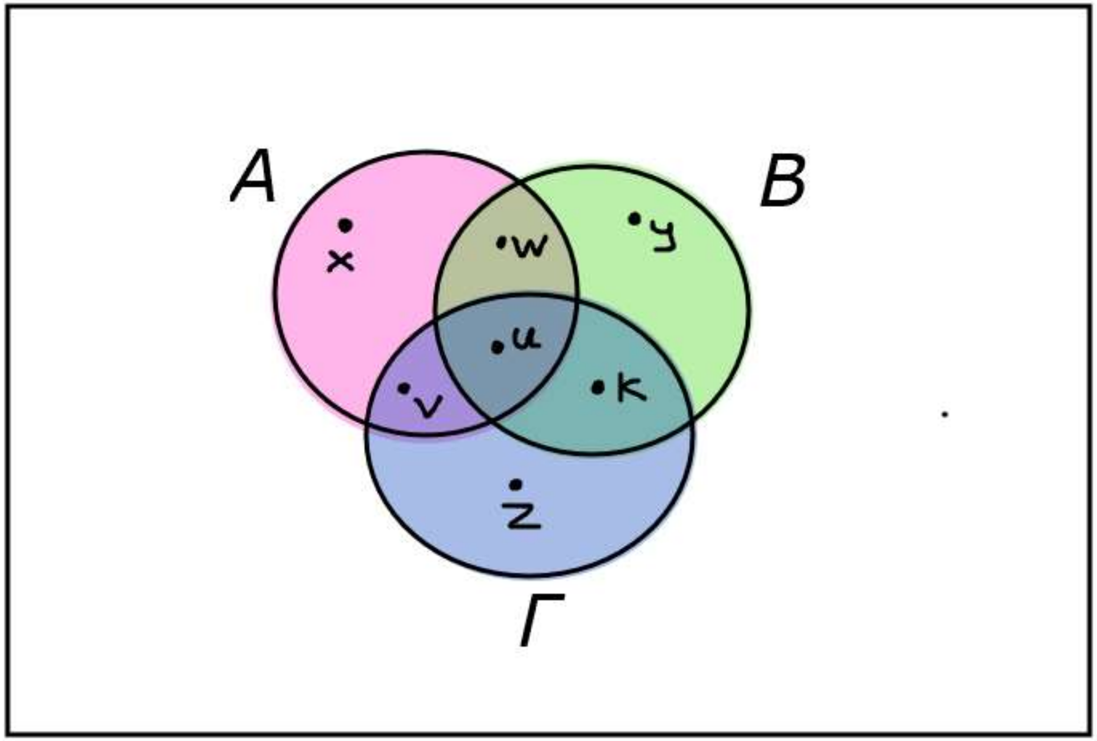


A-B = σύνολο παιδιών που ασχολούνται με το άθλημα του ποδοσφαίρου αλλά δεν μαθαίνουν μουσική.



$$A \cap B \cap \Gamma = \varnothing$$

Α, Β, Γ ανά δύο ασυσχέτιστα ή ξένα



$x \in A, x \notin B, x \notin \Gamma$

$y \in B, y \notin A, y \notin \Gamma$

$z \in \Gamma, x \notin A, x \notin B$

$w \in A, w \in B, w \notin \Gamma$

$v \in A, v \notin B, x \in \Gamma$

$\kappa \in B, \kappa \in \Gamma, \kappa \notin A$

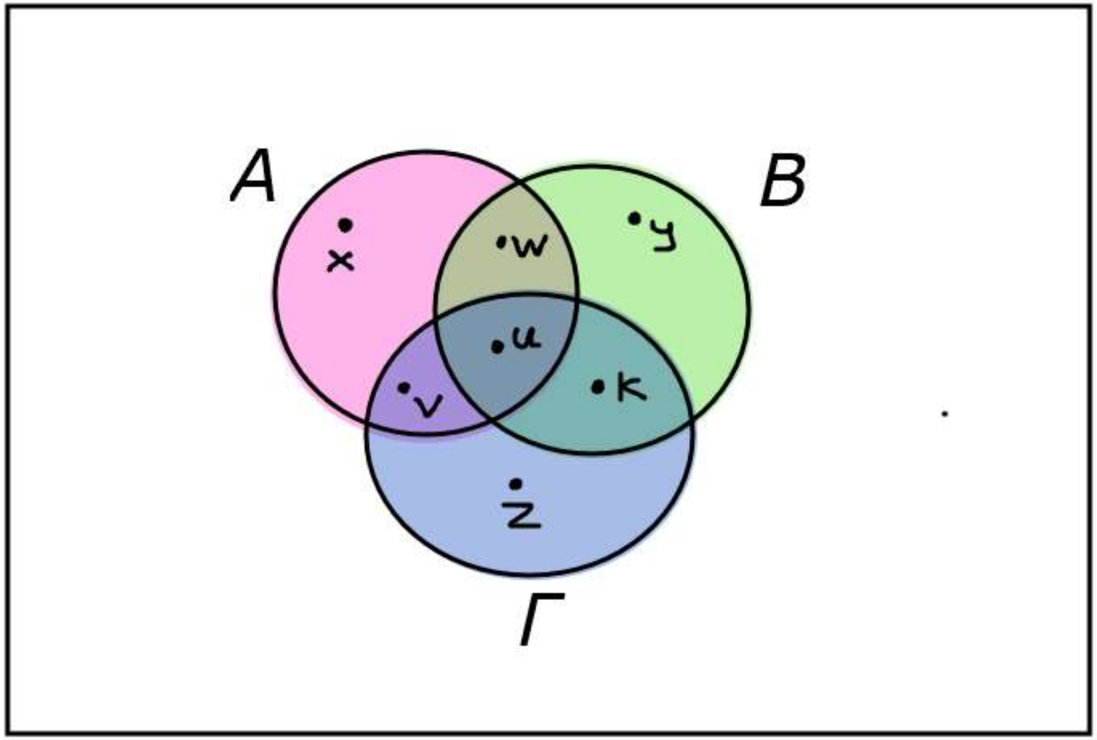
$u \in A, u \in B, u \in \Gamma$

$u \in A \cap B \cap \Gamma$

$x \in A - (B \cup \Gamma)$

$w \in (A \cap B) - \Gamma$

$v \in (A \cap \Gamma) - B$



Ω = μαθητές δημοτικού σχολείου

Α = μαθαίνουν μουσική

Β = ασχολούνται με αθλήματα

Γ = φοιτούν στην Β' Δημοτικού

Παραδείγματα

x = μαθαίνει μουσική, δεν αθλείται και δεν φοιτά στη Β' Δημοτικού

κ = ασχολείται με αθλήματα, φοιτά στη Β' Δημοτικού αλλά δεν εκπαιδεύεται στη μουσική

u = μαθαίνει μουσική, ασχολείται με αθλήματα και φοιτά στη Β' Δημοτικού

Άσκηση προς κατανόηση

Ένα δημοτικό σχολείο έχει 400 παιδιά. 200 παιδιά εκπαιδεύονται στην αγγλική γλώσσα, 180 παιδιά εκπαιδεύονται στη γαλλική γλώσσα και 60 και στις δύο γλώσσες μαζί. Πόσα παιδιά εκπαιδεύονται

1. Σε τουλάχιστον μια γλώσσα
2. Μόνο στην αγγλική γλώσσα
3. Σε μια γλώσσα μόνο
4. Σε καμία γλώσσα

Απάντηση

Ω = δειγματοχώρος = παιδιά του δημοτικού σχολείου, $|\Omega| = 400$

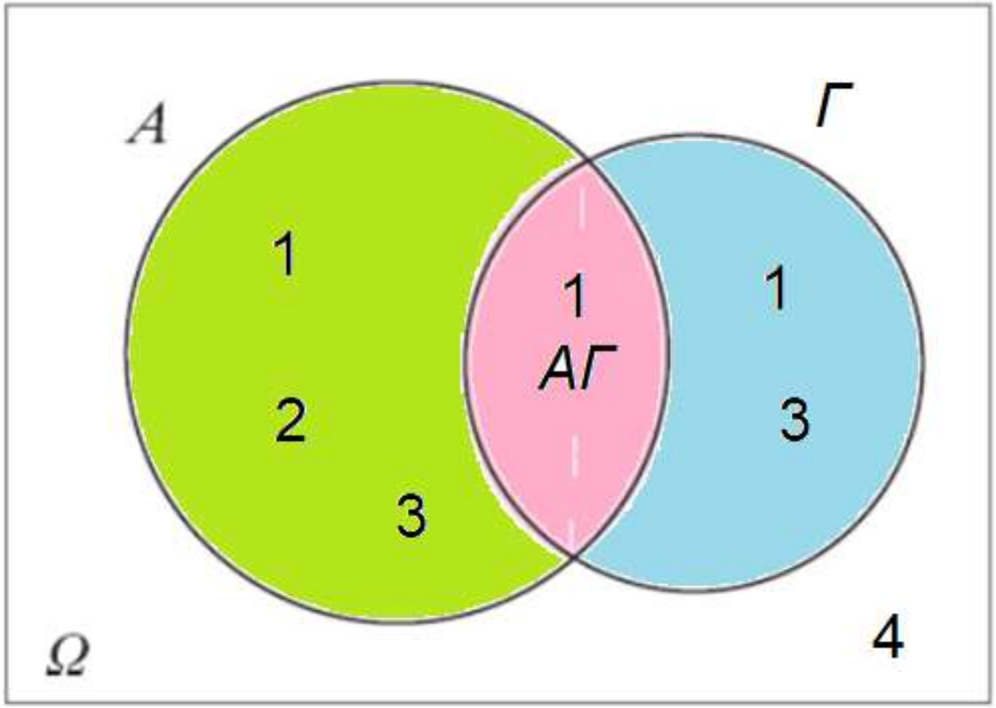
Α = παιδιά του δημοτικού σχολείου που εκπαιδεύονται στην αγγλική γλώσσα

$A \subseteq \Omega$, $|A| = 200$

Γ = παιδιά του δημοτικού σχολείου που εκπαιδεύονται στην γαλλική γλώσσα

$\Gamma \subseteq \Omega$, $|\Gamma| = 180$

$|A \cap \Gamma| = 60$



Στο διάγραμμα δείχνουμε που βρίσκονται οι απαντήσεις

1. $|A \cup \Gamma| = |A| + |\Gamma| - |A \cap \Gamma| = 200 + 180 - 60 = 320$ παιδιά εκπαιδεύονται σε τουλάχιστον μια γλώσσα
2. $|A - \Gamma| = |A| - |A \cap \Gamma| = 200 - 60 = 140$ παιδιά εκπαιδεύονται μόνο στην αγγλική γλώσσα
3. $|A - \Gamma| + |\Gamma - A| = |A| - |A \cap \Gamma| + |\Gamma| - |A \cap \Gamma| = 200 + 180 - 120 = 260$ παιδιά εκπαιδεύονται στην αγγλική ή στη γαλλική γλώσσα αλλά όχι και στις δύο μαζί
4. $|\Omega| - |A \cup \Gamma| = 400 - 320 = 80$ παιδιά δεν εκπαιδεύονται σε γλώσσα

Ανεξαρτησία ενδεχομένων

Δύο ενδεχόμενα είναι **ανεξάρτητα** αν έκαστο ανήκει σε διαφορετικό δειγματοχώρο και η έκβαση του ενός δεν επηρεάζει την έκβαση του άλλου.

Παράδειγμα το νόμισμα και το ζάρι.

Νόμισμα $\Omega 1 = \{K, \Gamma\}$

Ζάρι $\Omega 2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

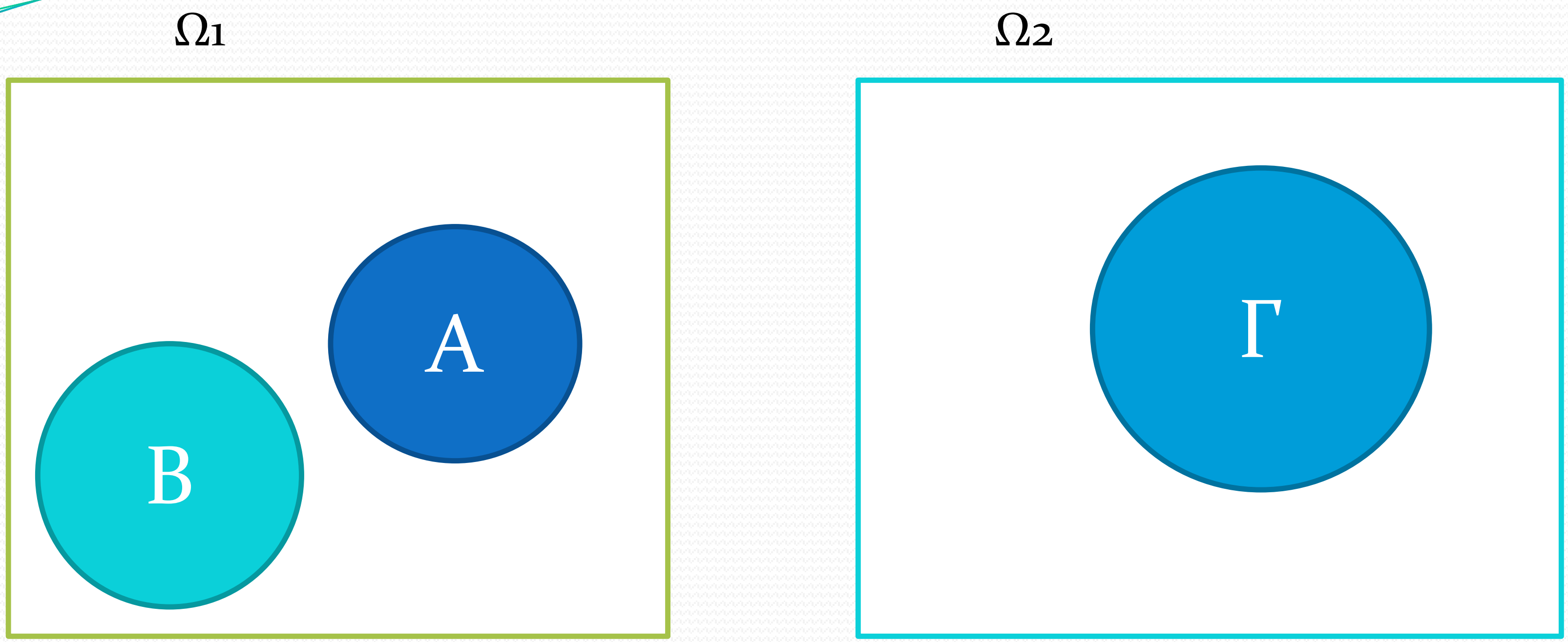
Αν ρίξουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι δημιουργούνται 2 Χ 6 = 12 δυνατοί συνδυασμοί ενδεχόμενα.

Παράδειγμα.

Η κα Ελένη έχει δύο αυτοκίνητα μάρκας Α1 και Α2. Στην γκαρνταρόμπα της έχει 4 τσάντες μάρκας Τ1, Τ2, Τ3, Τ4 και 3 ζευγάρια γυαλιών ηλίου Γ1, Γ2, Γ3. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει στιλιστική συνάφεια.

Αν χρησιμοποιήσει για την έξοδό της αυτοκίνητο, τσάντα και γυαλιά ηλίου, τότε υπάρχουν 2 Χ 4 Χ 3 = 24 δυνατοί συνδυασμοί. Π.χ . { Α2, Τ3, Γ1}

Αν δεν χρησιμοποιήσει αυτοκίνητο, υπάρχουν 4 Χ 3 = 12 δυνατοί συνδυασμοί. Π.χ. {Τ4, Γ3}



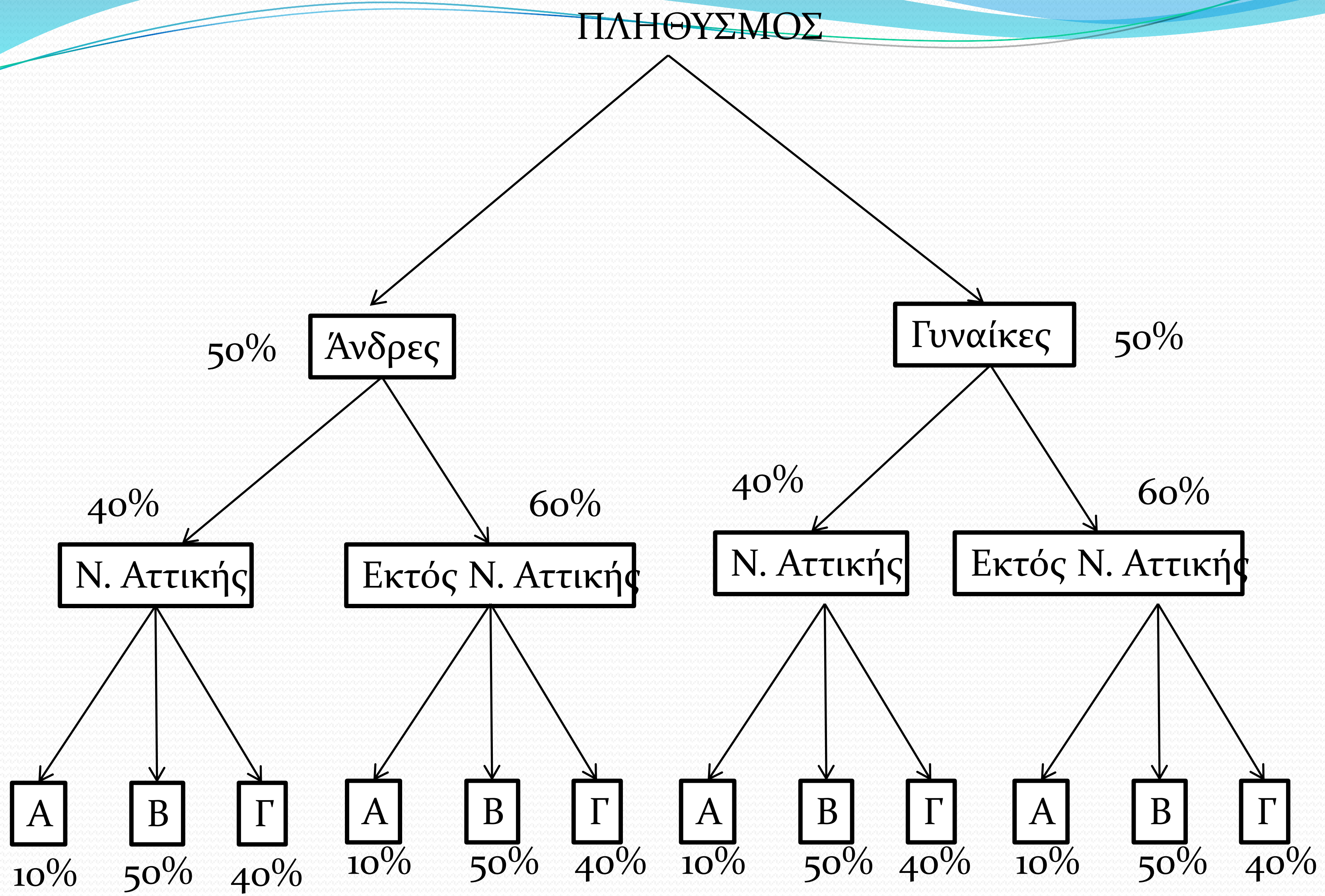
Α και Β ασυσχέτιστα ή ξένα μεταξύ τους

Α και Γ ανεξάρτητα μεταξύ τους

Δεντροδιάγραμμα

Μια ορθή πολιτική για την ανεξαρτησία ενδεχομένων είναι η δημιουργία διαγράμματος. Αυτό αποδίδει οπτικά τη δυνατότητα να δούμε πλήρεις και μερικούς συνδυασμούς.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι σε έναν πληθυσμό το ποσοστό ανδρών γυναικών είναι 50% - %50% και η εκπαίδευση ανεξάρτητα του φύλου είναι 10% Α'-βάθμια, 50% Β'-βάθμια και 40% Γ'-βάθμια. Επίσης ανεξάρτητα φύλου και εκπαίδευσης το 40% κατοικεί στο νομό Αττικής.


ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
Άνδρες
50%
Γυναίκες
50%
40%
Ν. Αττικής
60%
Εκτός Ν. Αττικής
40%
Ν. Αττικής
60%
Εκτός Ν. Αττικής
Α
10%
Β
50%
Γ
40%
Α
10%
Β
50%
Γ
40%
Α
10%
Β
50%
Γ
40%
Α
10%
Β
50%
Γ
40%

Υπολογισμός ποσοστών

Για να βρούμε το ποσοστό ενός συγκεκριμένου συνδυασμού, πολλαπλασιάζουμε τα ποσοστά που συναντάμε στη διαδρομή του δέντρου.

Παράδειγμα 1.

Άνδρες κάτοικοι Ν. Αττικής, Β'βάθμιας εκπαίδευσης. 50% x 40% x 50% = 10%.

Παράδειγμα 2.

Γυναίκες μη κάτοικοι Ν. Αττικής, Α'βάθμιας εκπαίδευσης. 50% x 60% x 10% = 3%.

Παράδειγμα 3.

Άνδρες μη κάτοικοι Ν. Αττικής. 50% x 60% = 30%

Παράδειγμα 4.

Γυναίκες κάτοικοι Ν. Αττικής, Β'βάθμιας ή Γ'βάθμιας εκπαίδευσης.

50% x 40% x (50% + 40%) = 18%

Παράδειγμα 5.

Άνδρες Α'βάθμιας ή Γ'βάθμιας εκπαίδευσης. 50% x (10% + 40%) = 25%

Αν ο πληθυσμός αποτελείται από 10000000 άτομα, τότε απλά πολλαπλασιάζουμε το ποσοστό με το πλήθος του πληθυσμού, π.χ. στο παράδειγμα 5, 2500000 άτομα.