



Πρόγραμμα Σπουδών: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ και ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

Θεματική Ενότητα: ΔΕΟ-13. Ποσοτικές Μέθοδοι

Συχνές Ερωτήσεις και Απαντήσεις Επιχειρησιακής Έρευνας

Ερώτηση 1. Αντικείμενο της “Επιχειρησιακής Έρευνας”.

Με τον όρο **Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research)**, αναφερόμαστε στην “επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση -optimization- της απόδοσης ενός συστήματος”. Ειδικότερα, “πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας (μαθηματικά) μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για τη λήψη αποφάσεων που θα βελτιστοποιήσουν τη λειτουργία του υπό μελέτη συστήματος”. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται συχνά και με τους όρους Διοικητική Επιστήμη (Management Science), Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων (Decision Making), ή Ποσοτική Ανάλυση (Quantitative Analysis).

Η Επιχειρησιακή Έρευνα δεν είναι απλά μια συλλογή τεχνικών, αποτελεί (κυρίως) την ενδεδειγμένη διαδικασία επιστημονικής προσέγγισης των προβλημάτων κατανομής των περιορισμένων πόρων που παρουσιάζονται σε συστήματα των φυσικών και κοινωνικών επιστημών. Σε γενικές γραμμές, η συνεισφορά της Επιχειρησιακής Έρευνας αναφέρεται :

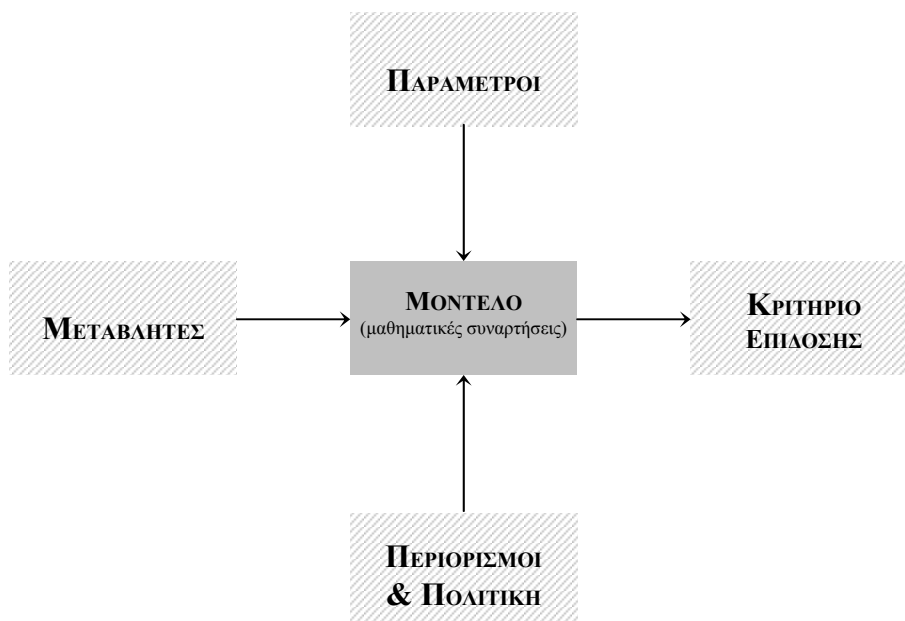
- στην υποστήριξη των αποφάσεων της διοίκησης ενός υπαρκτού συστήματος για κάποιο λειτουργικό πρόβλημα με τη δημιουργία ενός μαθηματικού – αναλυτικού μοντέλου ή, αν κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, μ’ ένα μοντέλο προσομοίωσης το οποίο επιτρέπει στον ηλεκτρονικό υπολογιστή να προσεγγίσει τη συμπεριφορά του συστήματος.
- στη μελέτη της δομής των ανωτέρω αποφάσεων ώστε να είναι εφικτή η ανάπτυξη μιας διαδικασίας εύρεσής τους (επίλυση του μοντέλου).
- στη διατύπωση της μαθηματικής θεωρίας που οδηγεί στην απόφαση, η οποία βελτιστοποιεί τον προκριθέντα στόχο (: κριτήριο επίδοσης του συστήματος), ή που συγκρίνει διαφορετικούς τρόπους ενεργειών αποτιμώντας ένα συγκεκριμένο κριτήριο επίδοσης.

Στις μέρες μας, είναι γενικά παραδεκτό ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει τις δυνατότητες επιτυχούς αντιμετώπισης περίπλοκων και πολύπλοκων προβλημάτων, πολλές φορές σε στοχαστικά περιβάλλοντα αβεβαιότητας. Με όπλο αναλυτικές τεχνικές αλλά και τεχνικές προσομοίωσης, διευκολύνει την εις βάθος κατανόησή τους προκρίνοντας ταυτόχρονα πρακτικές επίλυσης.

Ερώτηση 2. Μοντελοποίηση συστημάτων με τη βοήθεια της Επιχειρ. Έρευνας.

Το μαθηματικό μοντέλο ενός συστήματος δεν είναι παρά μια εξιδανικευμένη περιγραφή του, εκφρασμένη με μαθηματικά σύμβολα και σχέσεις. Συνεπώς, για να προχωρήσουμε στη διατύπωσή του, θα πρέπει να ορίσουμε τα συστατικά που πρέπει απαραίτητως να συμπεριλαμβάνονται σ’ αυτή την εξιδανίκευση. Σε γενικές γραμμές διακρίνουμε (βλ. εικόνα 1) :

- τις μεταβλητές (αγνώστους) του συστήματος οι οποίες εκπροσωπούν τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν,
- ένα (κατάλληλο) κριτήριο της επίδοσης του συστήματος εκφρασμένο ως μια μαθηματική συνάρτηση των ανωτέρω μεταβλητών,



Εικόνα 1 Είσοδοι και έξοδοι ενός (μαθηματικού) μοντέλου βελτιστοποίησης.

- τους περιορισμούς, αποδιδόμενους μαθηματικά μέσω εξισώσεων ή ανισοτήτων, που θα πρέπει να ικανοποιούν οι τιμές των μεταβλητών ώστε να ενσωματώνονται στο μοντέλο οι συνθήκες λειτουργίας του συστήματος,
- τις εξωγενείς ως προς την μοντελοποίηση, γνωστές (ή εκτιμώμενες εκ των προτέρων), παραμέτρους του συστήματος.

Οι **μεταβλητές** είναι τα δομικά στοιχεία του προβλήματος τα οποία καθορίζονται από τον αναλυτή. Αυτός είναι και ο λόγος που συχνά αναφέρονται και ως μεταβλητές ελέγχου ή μεταβλητές απόφασης. Θεωρήστε για παράδειγμα μια βιομηχανία γάλακτος που προετοιμάζει την ημερήσια γραμμή παραγωγής της. Πολλές είναι οι μεταβλητές που υπάρχουν σ' ένα τέτοιο σύστημα. Μεταξύ τους, εύκολα μπορεί κάποιος να αναφέρει την ποσότητα των διαφόρων τύπου γάλακτος, τυριού και γιαουρτιού η οποία παράγεται:

x_1 = η ποσότητα (lit) πλήρους γάλακτος που θα παραχθεί,

x_2 = η ποσότητα (lit) άπαχου γάλακτος που θα παραχθεί,

x_3 = η ποσότητα (kg) τυριού φέτας που θα παραχθεί,

...

(χρησιμοποιείται συνήθως το γράμμα x για να αντιπροσωπευθεί μια μεταβλητή ενώ μ' ένα δείκτη $i = 1, 2, \dots$ επιτυγχάνεται η μεταξύ τους διάκριση).

Βέβαια, το πρόβλημα αφορά τον εντοπισμό τιμής για την κάθε μεταβλητή απόφασης ώστε να... Απαιτείται δηλαδή η ύπαρξη κάποιου **στόχου¹ προς επίτευξη**. Ο στόχος αυτός μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του κέρδους, την καλύτερη αξιοποίηση του εργατικού δυναμικού, ή την ελαχιστοποίηση του κόστους, της υπερωριακής απασχόλησης, κτλ. Αναζητούνται εκείνες τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου οι οποίες θα βελτιστοποιήσουν το κριτήριο επίδοσης -στόχος- που ορίζεται σ' αυτό το στάδιο της μοντελοποίησης. Στο παράδειγμα της γαλακτοβιομηχανίας που αναφέρθηκε πιο πάνω, ως στόχος θα μπορούσε να καθοριστεί η ημερήσια μεγιστοποίηση των κερδών. Τότε, στη συνέχεια, θα έπρεπε να προσδιοριστεί και καταγραφεί ένας τρόπος έκφρασης του συνολικού της κέρδους, ως συνάρτηση όλων των μεταβλητών απόφασης (προϊόντων που παρασκευάζονται), εκτιμώντας τη συνεισφορά του καθενός χωριστά.

¹ Ο στόχος αυτός δεν είναι παρά το κριτήριο επίδοσης του συστήματος σε μορφή μιας συνάρτησης των μεταβλητών απόφασης και πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί (: βελτιστοποιηθεί). Βιβλιογραφικά είναι γνωστός με τον όρο «**αντικειμενική συνάρτηση**».

Ο στόχος που ορίστηκε πρέπει να επιτευχθεί κάτω από τις συνθήκες λειτουργίας του συστήματος που μελετάται. **Περιορισμοί**, όπως η ανεπάρκεια των πόρων του συστήματος (π.χ. πρώτων υλών, εργατικού δυναμικού), η απορροφητικότητα της αγοράς, οι συμφωνίες με προμηθευτές και αγοραστές, οι χρόνοι παράδοσης των παραγόμενων προϊόντων, κτλ. δημιουργούν αυτές τις συνθήκες. Αν η προαναφερόμενη βιομηχανία γάλακτος ήταν σε θέση να εξασφαλίσει απεριόριστη πρώτη ύλη και παραγωγική δυναμικότητα, καθώς επίσης και μονοπωλιακή παρουσία στην αγορά, θα εκτόξευε τα κέρδη της στο άπειρο. Τα πράγματα βέβαια είναι εντελώς διαφορετικά. Στο στάδιο αυτό της μοντελοποίησης, καλείστε να εντοπίσετε και να καταγράψετε ως συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης τους παράγοντες οι οποίοι επιβάλλουν όρια στις τιμές τους και συνεπώς, και στην τιμή του κριτηρίου επίδοσης του συστήματος. Οι (μαθηματικές) σχέσεις που αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς είναι συνήθως ανισότητες της μορφής «δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από» ($\leq$)² κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του μοντέλου που χρησιμοποιούνται για να ολοκληρωθούν οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών απόφασης ονομάζονται **παράμετροι**. Το ανά μονάδα προϊόντος κέρδος ή κόστος, η (προβλεπόμενη) ζήτηση της αγοράς, η διαθεσιμότητα των πρώτων υλών, η απαιτούμενη κατανάλωση εκάστης εξ' αυτών ανά μονάδα προϊόντος που παράγεται, κλπ. είναι μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα παραμέτρων ενός μοντέλου για συστήματα τα οποία μοντελοποιούνται από το γραμμικό μοντέλο. Οι τιμές των παραμέτρων θεωρούνται γνωστές και αμετάβλητες.

Η εικόνα 1 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συσχετίζονται τα συστατικά ενός μοντέλου βελτιστοποίησης, όπως αυτά αναλύθηκαν ανωτέρω. Το μοντέλο βρίσκεται στη μέση. Μεταβλητές απόφασης, παράμετροι, πολιτικές και περιορισμοί απαρτίζουν τα στοιχεία εισόδου του μοντέλου (input), ενώ, η τιμή του κριτηρίου επίδοσης την έξοδο (output). Το μοντέλο αυτό καθ' αυτό απεικονίζει όλες τις (σημαντικές) σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών και αποτελεί στην πραγματικότητα μία «μηχανή» η οποία μετασχηματίζει τις μεταβλητές απόφασης σε κάποιο κριτήριο επίδοσης κάτω από το συγκεκριμένο σύνολο παραμέτρων, πολιτικών και περιορισμών.

Ερώτηση 3. Το μοντέλο του “Γραμμικού Προγραμματισμού”.

Ως μαθηματικό μοντέλο ο γραμμικός προγραμματισμός, αφορά τη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας *γραμμικής* συνάρτησης, που παριστά το κριτήριο επίδοσης του συστήματος, κάτω από ένα σύνολο *γραμμικών* περιορισμών (ανισότητες ή/και εξισώσεις) που αντιπροσωπεύουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή επιχειρείται:

$$\text{βελτιστοποίηση της } Z = (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n)$$

κάτω από περιορισμούς (όταν είναι)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n [\leq, \geq, =] b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n [\leq, \geq, =] b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n [\leq, \geq, =] b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n [\leq, \geq, =] b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

² Υπάρχει φυσικά η δυνατότητα οι σχέσεις να είναι της μορφής ' $\geq$ ' ή ' $=$ ' υποδεικνύοντας περιορισμούς των οποίων η τιμή (αντίστοιχα) «δεν μπορεί να είναι μικρότερη από» ή «πρέπει να είναι ακριβώς» κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Δηλαδή, στο μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού, τόσο η αντικειμενική συνάρτηση, όσο και οι περιορισμοί, εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης.

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι ένα μαθηματικό μοντέλο (της Επιχειρησιακής Έρευνας) που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του προβλήματος της *κατανομής των περιορισμένων πόρων (π.χ. μέσων παραγωγής) ενός συστήματος σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες (π.χ. τα διάφορα προϊόντα) κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο*. Οι τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας στους οποίους ταιριάζει αυτή η περιγραφή είναι απεριόριστες και πολυποίκιλες: η κατανομή των παραγωγικών συντελεστών μιας επιχείρησης σε παραγόμενα προϊόντα, η κατανομή των εθνικών πόρων στις τομεακές πολιτικές, η επιλογή ενός χαρτοφυλακίου με μέγιστη δυνατή απόδοση, η επιλογή ενός άριστου σχεδίου μεταφοράς αγαθών, η κατανομή της καλλιεργήσιμης γης σε διάφορες αγροτικές δραστηριότητες, ο πολεοδομικός σχεδιασμός ενός χώρου, η προστασία του περιβάλλοντος, ο προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού, κ.ο.κ.

Ο όρος «προγραμματισμός» χρησιμοποιείται εδώ με την έννοια «σχεδιασμός» και δεν έχει σχέση με «τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών». Ο γραμμικός προγραμματισμός αποσκοπεί στη *σχεδίαση των δραστηριοτήτων* του συστήματος που μοντελοποιεί, σε τρόπο ώστε, μεταξύ όλων των δυνατών σχεδιασμών να επιλεγεί εκείνος που θα πραγματοποιήσει έναν προκαθορισμένο στόχο κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (το βέλτιστο).

Ερώτηση 4. Επίλυση ενός μοντέλου (προβλήματος) “Γραμμικού Προγραμματισμού”.

Οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μόνο μεταβλητές μπορεί να λυθεί γραφικά. Σε μια τέτοια περίπτωση:

1. Αντιστοιχούμε τις τιμές των μεταβλητών x_1 και x_2 σ’ ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων: ο οριζόντιος άξονας παριστά τις τιμές της x_1 κι ο κάθετος τις τιμές της x_2 . Επειδή οι μεταβλητές παίρνουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός χρησιμοποιούμε μόνο το πρώτο τεταρτημόριο όπου η αρχή των αξόνων παριστά τη λύση $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Η λύση αυτή σπανίως είναι η βέλτιστη. Για παράδειγμα για ένα πρόβλημα παραγωγής δύο προϊόντων παριστάνει την περίπτωση να μην παράγεται τίποτε (!). Κάθε λύση του προβλήματος η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη μη αρνητικότητας των μεταβλητών είναι σημείο του θετικού (πρώτου) τεταρτημορίου.
2. Η επόμενη φάση της γραφικής επίλυσης, αφορά τη διαδοχική χάραξη των περιορισμών με παράλληλη σκιαγράφηση της **εφικτής περιοχής**, τα σημεία της οποίας ικανοποιούν όλους τους (μέχρι στιγμής) περιορισμούς. Το σύνολο των σημείων (x_1, x_2) που ικανοποιούν τον τυχαίο γραμμικό περιορισμό $f(x_1, x_2) \geq b$ ή $f(x_1, x_2) \leq b$ σχηματίζεται από τα σημεία της αντίστοιχης ευθείας $f(x_1, x_2) = b$ μαζί με όλα τα σημεία που βρίσκονται στη μια πλευρά της. Για να προσδιορίσουμε τη συγκεκριμένη πλευρά, διαλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $P(x_1, x_2)$ το οποίο δε βρίσκεται πάνω στην ευθεία $f(x_1, x_2) = b$. Αν ικανοποιεί τον περιορισμό, τότε και όλα τα σημεία της περιοχής που βρίσκεται από την πλευρά της ευθείας $f(x_1, x_2) = b$ που βρίσκεται το P ικανοποιούν τον περιορισμό. Οι λύσεις που βρίσκονται στην κοινή περιοχή όλων των περιορισμών (δηλαδή την εφικτή περιοχή) ονομάζονται εφικτές λύσεις αφού ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς.
3. Εντοπίζουμε τη βέλτιστη λύση: χαράσσουμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ για αυθαίρετη τιμή Z , και την μετακινούμε παράλληλα προς την κατεύθυνση βελτίωσης της τιμής (αύξησης σε προβλήματα μεγιστοποίησης, μείωσης σε προβλήματα ελαχιστοποίησης) της αντικειμενικής συνάρτησης. **Το ακραίο σημείο (κορυφή) από το οποίο διέρχεται η αντικειμενική συνάρτηση πριν απομακρυνθεί από την εφικτή περιοχή είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος και είναι φυσικά μία εκ των εφικτών λύσεων.**

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να έχει μία ή άπειρες βέλτιστες λύσεις. Μπορεί ακόμη μην έχει καμία εφικτή λύση (γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή είναι το κενό σύνολο δηλαδή οι περιορισμοί δεν συναληθεύουν πουθενά). Μία τελευταία περίπτωση είναι ένα πρόβλημα το οποίο είναι μη φραγμένο πρόβλημα (δηλαδή η τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μεγάλη ή μικρή τιμή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης αντίστοιχα). Στην τελευταία περίπτωση το πιθανότερο είναι ότι έχουμε κάποιο σφάλμα στην προσέγγιση του προβλήματος (στον αληθινό κόσμο δεν υπάρχουν μη φραγμένα προβλήματα, προσπαθούμε πάντα, στα μέτρα του εφικτού να βρούμε μία πεπερασμένη λύση).

Η γραφική μέθοδος επίλυσης μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού δίνει τη δυνατότητα μιας γεωμετρικής προσέγγισης της αλγεβρικής διαδικασίας επίλυσης των προβλημάτων με περισσότερες από δύο μεταβλητές, της **μεθόδου Simplex**. Στη μέθοδο Simplex παριστάνουμε το μοντέλο με τη μορφή ενός πίνακα (Simplex tableau) και με στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών του πίνακα οδηγούμαστε στη διαμόρφωση νέων πινάκων Simplex, μέχρι να φτάσουμε στον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Η Simplex βασίζεται στο γεγονός ότι η βέλτιστη λύση είναι κάποια κορυφή της εφικτής περιοχής. Η τεχνική ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο όπου όλες οι μεταβλητές απόφασης έχουν μηδενική τιμή, διερευνά τις κορυφές της εφικτής περιοχής δηλαδή κάθε ενδιάμεσος πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μια κορυφή και τελικά εντοπίζει την καλύτερη κορυφή.

Ερώτηση 5. Θεωρία Δυσίσμου.

Σύμφωνα με τη δυϊκή θεωρία, σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αντιστοιχεί ένα δεύτερο πρόβλημα, το οποίο προκύπτει από το αρχικό. Το αρχικό πρόβλημα το ονομάζουμε **πρωτεύον** (primal) ενώ το δεύτερο το ονομάζουμε **δυϊκό** (dual). Το δυϊκό μοντέλο αποτελεί μια εναλλακτική άποψη του ίδιου προβλήματος, από το οποίο προέκυψε το πρωτεύον πρόβλημα, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες του συνολικού προβλήματος. Συνήθως, η επίλυση του δυϊκού προβλήματος παρέχει πληροφορίες σχετικές με τη συνεισφορά και την αξία των πόρων (πρώτες ύλες) που καταναλώνονται στο βέλτιστο σχέδιο που βρέθηκε από το πρωτεύον. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Ένα ξυλουργείο κατασκευάζει θρανία, τραπέζια και καρέκλες. Για την παραγωγή τους το μόνο που στ' αλήθεια χρειάζεται είναι ξυλεία και η δουλειά του ξυλουργού, δουλειά που μπορεί να διαχωριστεί στη φάση της κατασκευής και στη φάση του φινιρίσματος σύμφωνα με τον πίνακα που ακολουθεί:

ΠΡΩΤΗ ΥΛΗ	ΠΡΟΪΟΝ			ΔΙΑΘΕΣΙΜΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ
	Θρανίο	Τραπέζι	Κάθισμα	
Ξυλεία (m)	8	6	1	48 m
Κατασκευή (ώρες)	2	1.5	0.5	8 ώρες
Φινίρισμα (ώρες)	4	2	1.5	20 ώρες

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα θρανίο πωλείται προς 60€, ένα τραπέζι προς 30€ και ένα κάθισμα προς 20€, ο ξυλουργός ενδιαφέρεται να μάθει πως μπορεί να αξιοποιήσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τις πρώτες ύλες που διαθέτει ώστε να μεγιστοποιήσει τα συνολικά του έσοδα.

Με άλλα λόγια, το ενδιαφέρον του ξυλουργού επικεντρώνεται στην εύρεση του «σωστού» πλήθους προϊόντων από το κάθε είδος που κατασκευάζει. Αν λοιπόν x_1 , x_2 και x_3 είναι το πλήθος θρανίων, τραπέζιων και καθισμάτων που πρέπει να κατασκευάζονται, το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα του ξυλουργού είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } Z = (60x_1 + 30x_2 + 20x_3) \quad (\text{συνολικά έσοδα σε ευρώ}) \\ &\text{κάτω από τους περιορισμούς} \\ &8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad (\text{διαθέσιμη ποσότητα ξυλείας, m}) \\ &2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad (\text{διαθέσιμος χρόνος για κατασκευή, hr}) \\ &4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad (\text{διαθέσιμος χρόνος για φινίρισμα, hr}) \\ &x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Το ανωτέρω **πρωτεύον** πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει ως **δυϊκό** το

$$\begin{aligned} &\text{minimize } Y = (48w_1 + 8w_2 + 20w_3) \quad (\text{συνολικά έσοδα σε ευρώ}) \\ &\text{κάτω από τους περιορισμούς} \\ &8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \geq 60 \\ &6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 \geq 30 \\ &w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 \geq 20 \\ &w_1, \quad w_2, \quad w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό των δύο προβλημάτων ξέρουμε ότι ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού συνδέεται με την πρώτη μεταβλητή του πρωτεύοντος (θρανία), ο δεύτερος με τα τραπέζια και ο τρίτος περιορισμός έχει σχέση με τα καθίσματα. Ανάλογα, η δυϊκή μεταβλητή w_1 συνδέεται με τον πρώτο περιορισμό του πρωτεύοντος (ξυλεία), η w_2 με την κατασκευή των προϊόντων και η w_3 με το φινιρίσμά τους.

Υποθέστε τώρα ότι κάποιος εργολάβος επιθυμεί να αγοράσει όλους τους πόρους που έχει στη διάθεσή του το ξυλουργείο, δηλαδή τα 48 m ξυλείας, τις 8 ώρες για την κατασκευή των παραγόμενων προϊόντων και τις 20 ώρες για το φινιρίσμά τους. Προς τούτο, πρέπει να ορίσει μια τιμή ανά μονάδα του κάθε πόρου που είναι διατεθειμένος να πληρώσει. Ας είναι

- w_1 το ποσό (ευρώ) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για ένα μέτρο ξυλείας
- w_2 το ποσό (ευρώ) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για μια ώρα εργασίας
- w_3 το ποσό (ευρώ) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για μια ώρα φινιρίσματος

Κατά συνέπεια, η συνολική τιμή που διατίθεται να πληρώσει ο εργολάβος για όλους του πόρους ανέρχεται σε $Y = 48w_1 + 8w_2 + 20w_3$. Η ποσότητα αυτή αφορά κόστος, και ως τέτοιο, στόχος μας πρέπει να είναι η ελαχιστοποίηση του. Κατά συνέπεια η αντικειμενική συνάρτηση για το δυϊκό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } Y = (48w_1 + 8w_2 + 20w_3)$$

Τι περιορισμούς όμως έχει να αντιμετωπίσει ο εργολάβος στην προσπάθειά του να ορίσει τις τιμές στην κάθε μονάδα πόρων του ξυλουργείου; Φυσικά οι τιμές αυτές θα πρέπει να είναι αρκετά υψηλές ώστε να παρακινηθεί ο ξυλουργός να πουλήσει. Για παράδειγμα ο εργολάβος θα πρέπει να προσφέρει στον ξυλουργό τουλάχιστον 60€ για να αγοράσει έναν συνδυασμό πόρων ο οποίος περιλαμβάνει 8 μέτρα ξύλου, 2 ώρες κατασκευής και 4 ώρες φινιρίσματος μια και ο ξυλουργός μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτούς τους πόρους για να κατασκευάσει ένα θρανίο το οποίο θα πωλήσει προς 60€. Άρα, αφού ο εργολάβος προσφέρει $(8w_1 + 2w_2 + 4w_3)$ ευρώ για τους πόρους που παράγουν ένα θρανίο, θα πρέπει να ορίσει τα w_1 , w_2 και w_3 σε τρόπο ώστε

$$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \geq 60.$$

Η συζήτηση αυτή αφορά βέβαια μόνο τον πρώτο περιορισμό του δυϊκού που συνδέεται με τα θρανία. Ανάλογα συμπεραίνουμε ότι τα w_1 , w_2 και w_3 πρέπει να ορισθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν και τις σχέσεις

$$\begin{aligned} 6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 &\geq 30 \quad (\text{τραπέζια}), \\ w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 &\geq 20 \quad (\text{καρέκλες}). \end{aligned}$$

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει το δυϊκό πρόβλημα³ το οποίο ελαχιστοποιεί την αξία των πόρων που καταναλώνονται στο άριστο σχέδιο παραγωγής. Καθόλου τυχαία η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος (δηλαδή η άριστη) είναι ίση με την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού. Δηλαδή **επέρχεται ισορροπία εκεί όπου το σύνολο των εσόδων ισούται με το σύνολο του κόστους των πόρων που αναλώνονται.**

³ Οι τιμές w_1 , w_2 , w_3 θα προσδιοριστούν από τη λύση του.