

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ (Hypothesis Testing)

Εκτιμητική : Μέθοδοι συλλογής και επεξεργασίας παρατηρήσεων με βασικό στόχο την εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων του πληθυσμού

**Έλεγχος στα-
τιστικών υπο-
θέσεων** : Μέθοδοι στατιστικής αξιοποίησης παρατηρήσεων με στόχο λήψη απόφασης κατά πόσο μια προκαθορισμένη τιμή (ή πεδίο τιμών) μιας παραμέτρου του πληθυσμού είναι αποδεκτή ή όχι

Παραδείγματα

- ♦ Έστω ότι το μέσο ετήσιο εισόδημα σε συγκεκριμένη πόλη υπολογίστηκε σε 4.500.000 δρχ. για κάποιο έτος. Τρία χρόνια αργότερα, θέλουμε να διαπιστώσουμε αν $\mu = 4.500.000$ εξακολουθεί να ισχύει ή όχι
- ♦ Η χρήση κάποιου φαρμάκου παρουσιάζει τα πρώτα θετικά αποτελέσματα κατά μέσο όρο μετά από 10 ημέρες. Για ένα νέο φάρμακο η κατασκευάστρια εταιρία ισχυρίζεται ότι τα αποτελέσματα έρχονται σημαντικά πιο γρήγορα. Εδώ θέλουμε να ελέγξουμε, αν ο χρόνος είναι μικρότερος του 10 ή όχι.

- ◆ Κατά την παράδοση μιας παρτίδας προϊόντων ο προμηθευτής δηλώνει ότι η αναλογία των ελαττωματικών δεν υπερβαίνει το 0,2. Προφανώς εδώ ο αγοραστής ενδιαφέρεται αν ισχύει ότι :

$$p \leq 0,2$$

Γενικά ισχύει ότι για να ελέγξουμε μια υπόθεση, την οποία συνήθως ονομάζουμε **μηδενική υπόθεση (null hypothesis)** και συμβολίζουμε με **H_0** , απαιτείται και μία **εναλλακτική υπόθεση (alternative hypothesis)** σε αντιπαράθεση προς την οποίαν ελέγχεται η H_0 , και η οποία συμβολίζεται με **H_1** . Προφανώς η H_0 και η H_1 είναι συμπληρωματικές.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Αποδοχή της } H_0 &\Rightarrow \text{Απόρριψη της } H_1 \\ \Rightarrow \text{Απόρριψη της } H_0 &\Rightarrow \text{Αποδοχή της } H_1 \end{aligned} \quad ||| \quad !$$

Για τα παραπάνω παραδείγματα έχουμε :

- $H_0 : \mu = 4.500.000$
 $H_1 : \mu \neq 4.500.000$
 - $H_0 : \mu = 10$
 $H_1 : \mu < 10$
 - $H_0 : p = 0.2$
 $H_1 : p > 0.2$
- Δίπλευρος έλεγχος
- Μονόπλευρος έλεγχος

Διαδικασία ελέγχου μιας στατιστικής υπόθεσης

Συλλογιστική : Έστω $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ η μηδενική υπόθεση υπό εξέταση, όπου ϑ_0 η τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού που αποτελεί την μηδενική υπόθεση και η εκτίμηση $\hat{\vartheta}$ που έδωσε το δείγμα για την ϑ .

Αν η διαφορά $|\hat{\vartheta} - \vartheta_0|$ μπορεί να αποδοθεί στις τυχαίες διακυμάνσεις της δειγματοληψίας, τότε η μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται αποδεκτή. Άλλως, δηλ. αν η διαφορά είναι *στατιστικά σημαντική*, η H_0 απορρίπτεται και κατά συνέπεια γίνεται αποδεκτή η H_1 .

Παράδειγμα

Κατά την παράδοση μιας παρτίδας προϊόντων ο προμηθευτής δηλώνει ότι η αναλογία των ελαττωματικών δεν είναι μεγαλύτερη από 0,2. Ο αγοραστής επιλέγει τυχαίο δείγμα 200 προϊόντων.

$$H_0 : p \leq 0,2$$

$$H_1 : p > 0,2$$



Μονόπλευρος έλεγχος

Γνωρίζουμε ότι για μεγάλα δείγματα ισχύει

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

δειγματική αναλογία $\rightarrow$ αμερόληπτη εκτιμήτρια της αναλογίας p του πληθυσμού

Προφανώς, ακόμα και αν $p \leq 0,2$ μπορεί να παρατηρήσουμε τιμές $\hat{p} > 0,2$

Όμως, ενώ τιμή $\hat{p} = 0,22$ μπορεί με μεγάλη πιθανότητα να αποδοθεί σε τυχαίες διακυμάνσεις της δειγματοληψίας, μια τιμή π.χ. $\hat{p} = 0,85$ αποτελεί ισχυρή ένδειξη για την απόρριψη της H_0

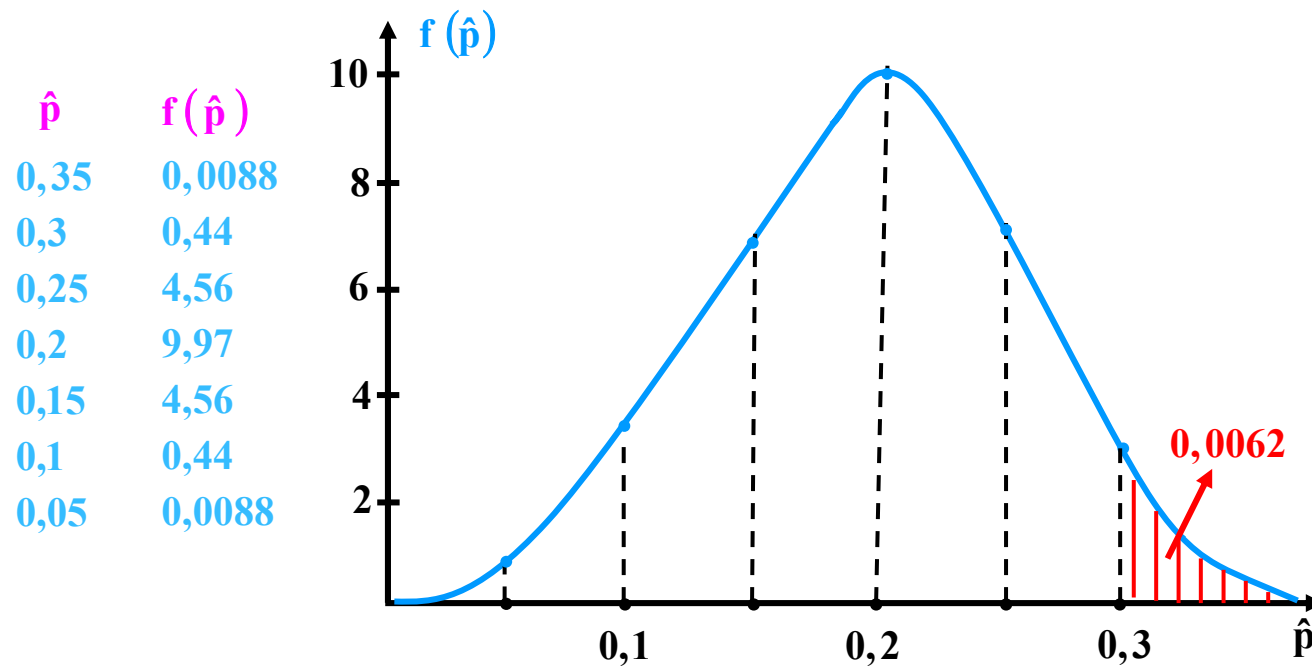
Πρόβλημα : από ποια τιμή της $\hat{p}$ και πέρα, θα θεωρούμε ότι το δείγμα δεν συνηγορεί υπέρ του ισχυρισμού του προμηθευτή $\rightarrow$ απόρριψη H_0

Έστω, ότι $p = 0,2$:

$$\Rightarrow \hat{p} \sim N\left(0,2, \underbrace{\frac{0,2 \cdot 0,8}{100}}_{0,04^2 = \sigma_{\hat{p}}^2}\right)$$

Από την σχέση της πυκνότητας της κανονικής κατανομής :

$$\begin{aligned} f(\hat{p}) &= \frac{1}{\sigma_{\hat{p}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(p - \hat{p})^2}{2 \cdot \sigma_{\hat{p}}^2}} = \\ &= 9,97 \cdot e^{-312,5 \cdot (0,2 - \hat{p})^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P(\hat{p} \geq 0,3) &= 1 - P(\hat{p} \leq 0,3) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0,3 - 0,2}{0,04}\right) = \\
 &= 1 - \underbrace{P(Z \leq 2,5)}_{0,9938} = \underline{\underline{0,0062}}
 \end{aligned}$$

- ⇒ Δοθέντος ότι $p = 0,2$, δηλ. ότι ισχύει η H_0 , η πιθανότητα να παρατηρήσουμε $\hat{p} \geq 0,3$ είναι $0,0062$
- ⇒ Με “σχετικά μεγάλη ασφάλεια” μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 , δεδομένου ότι η πιθανότητα η “μεγάλη διαφορά” $|\hat{p} - p| \geq 0,1$ οφείλεται σε τυχαίες διακυμάνσεις της δειγματοληψίας είναι ιδιαίτερα μικρή, εδώ $0,0062$
- Υιοθετώντας το κριτήριο αυτό, δηλ. να απορρίπτουμε την H_0 αν $\hat{p} \geq 0,3$, προφανώς μπορεί να απορρίψουμε την H_0 εσφαλμένα, με πιθανότητα $0,0062$

Το σφάλμα αυτό καλείται :

Σφάλμα τύπου I

Η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I καλείται **επίπεδο σημαντικότητας (level of significance)** του ελέγχου και συμβολίζεται με α

$$\longrightarrow P(\text{απόρριψη της } H_0 | H_0 \text{ ορθή}) = \alpha$$

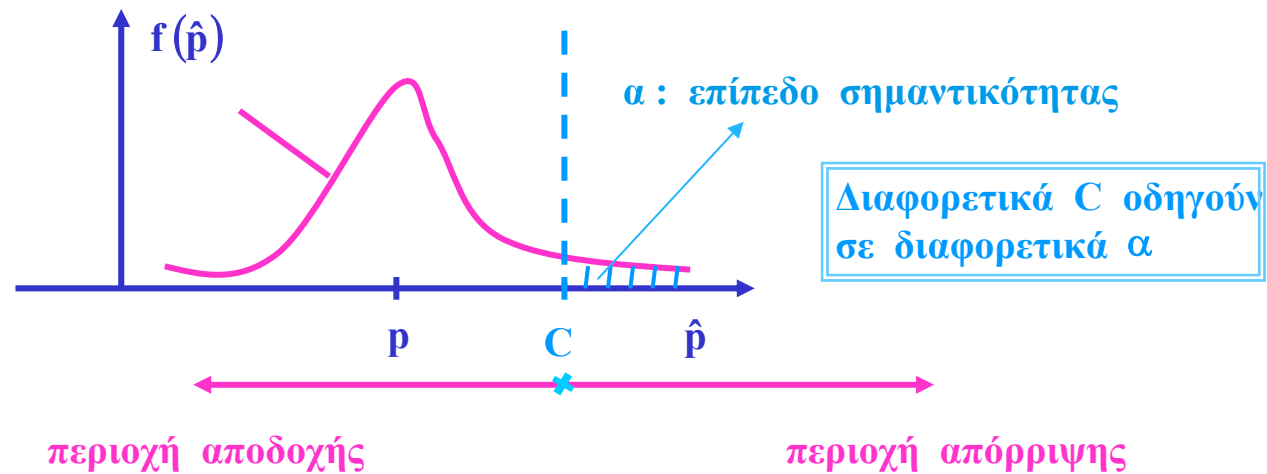
Σφάλμα τύπου I
επίπεδο σημαντικότητας

Το κριτήριο ελέγχου : “ Απόρριψη της H_0 αν $\hat{p} \geq C$ ”

κρίσιμη τιμή ελέγχου

διαίρει το δειγματικό χώρο (το πεδίο τιμών της $\hat{p}$ σε δύο ξένα υποσύνολα κατά τρόπο ώστε :

- αν $\hat{p} \leq C$: δεχόμαστε την H_0
- αν $\hat{p} > C$: απορρίπτουμε την H_0



- Επίσης υιοθετώντας το κριτήριο αυτό, μπορεί να αποδεχθούμε την H_0 , παρόλο που είναι λάθος.

Το σφάλμα αυτό καλείται :

Σφάλμα τύπου II

Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλ.

P (αποδοχή της H_0/H_0 εσφαλμένη) = β συμβολίζεται με β

Η πιθανότητα β , εξαρτάται από την πραγματική τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού που ελέγχεται, στην προκειμένη περίπτωση από το p .

- Αν για παράδειγμα $p = 0,3$, έχουμε :

$$\hat{p} \sim N\left(0,3 ; \frac{0,3 \cdot 0,7}{100}\right) = N(0,3 ; 0,0021)$$

Δεδομένου ότι $p = 0,3$ συνεπάγεται την μη ορθότητα της H_0 , αποδοχή της H_0 αποτελεί τώρα **σφάλμα τύπου II**.

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε :

$$\beta = P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ εσφαλμένη}) =$$

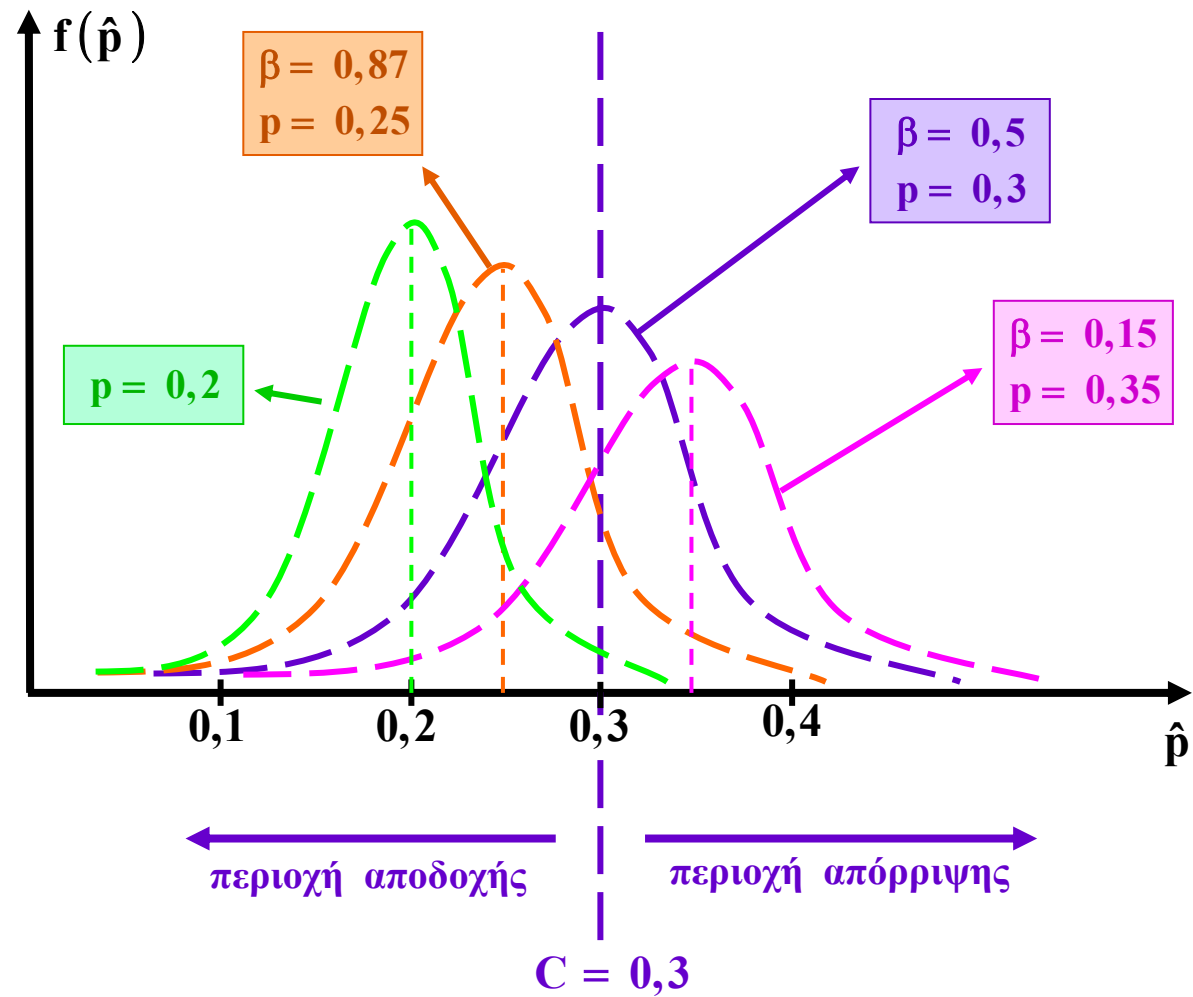
$$\begin{aligned} &= P(\hat{p} \leq C \mid p) = P(\hat{p} \leq 0,3 \mid p = 0,3) = \\ &= P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{0,3 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}}}\right) = P(Z \leq 0) = 0,5 \end{aligned}$$

- Av $p = 0,25$, ανάλογα :

$$\beta = P \left(Z \leq \frac{0,3 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}}} \right) = P (Z \leq 1,15) = 0,87$$

- Av $p = 0,35$, ανάλογα :

$$\beta = P \left(Z \leq \frac{0,3 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{100}}} \right) = P (Z \leq -1,04) = 0,15$$



Αποτελέσματα και τύποι σφαλμάτων ελέγχων υποθέσεων

Υ π ό θ ε σ η

Α π ό φ α σ η	H_0 ορθή	H_0 εσφαλμένη
Α π ο δ ο χ ή H_0	Ορθή απόφαση πιθανότητα : $1 - \alpha$	Εσφαλμένη απόφαση Σφάλμα τύπου II πιθανότητα : β
Α π ό ρ ρ ι ψ η H_0	Εσφαλμένη απόφαση Σφάλμα τύπου I πιθανότητα : α	Ορθή απόφαση πιθανότητα : $1 - \beta$

Κριτήρια και περιοχές αποδοχής / απόρριψης για δίπλευρους και μονόπλευρους ελέγχους

Δίπλευροι έλεγχοι

Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφέρουν αποκλίσεις και προς τις δύο κατευθύνσεις, π.χ.

- Έλεγχοι α λ λ α γ ώ ν παραμέτρων
- ποιοτικός έλεγχος διαστάσεων προϊόντων

Οι υποθέσεις H_0 και H_1 εξειδικεύονται ως εξής :

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$$

$$H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$$

Μονόπλευροι έλεγχοι

Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφέρουν αποκλίσεις μόνον προς μια κατεύθυνση, π.χ. έλεγχος μέσης διάρκειας ζωής μηχανήματος, έλεγχος αντοχής υλικού, ποσοστά ελαττωματικών.

Οι υποθέσεις H_0 και H_1 εξειδικεύονται ως εξής :

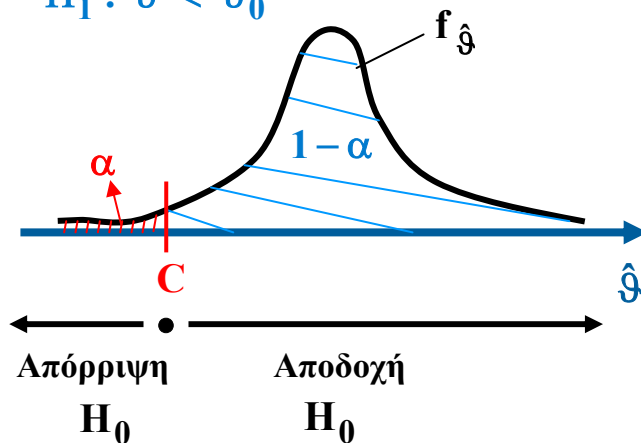
$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \quad (\vartheta \geq \vartheta_0)$$

$$H_1 : \vartheta < \vartheta_0$$

ή

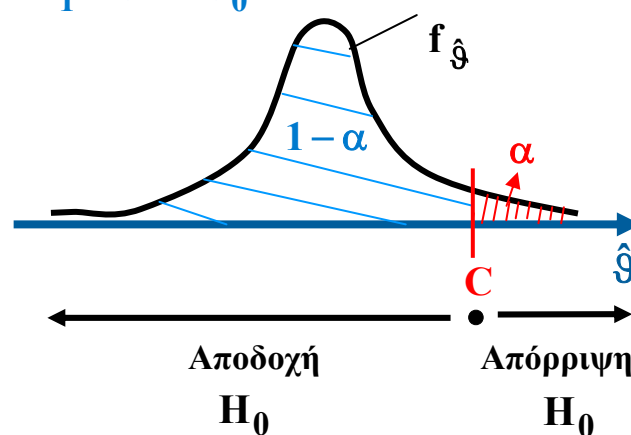
$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \quad (\vartheta \leq \vartheta_0)$$

$$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$$



Απόρριψη αν :

$$\hat{\vartheta} \leq C = \vartheta_0 - \kappa_{\alpha} \cdot \sigma_{\hat{\vartheta}}$$



Απόρριψη αν :

$$\hat{\vartheta} \geq C = \vartheta_0 + \kappa_{\alpha} \cdot \sigma_{\hat{\vartheta}}$$

ΒΗΜΑΤΑ ΕΝΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

- σημείο αναφοράς στατιστικός πληθυσμός με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, \vartheta)$$

παράμετρος πληθυσμού,
αντικείμενο του ελέγχου

και τυχαίο δείγμα τάξης n

- Ανάλογα με το πρόβλημα εξειδικεύουμε τις H_0 και H_1 , ώστε να διαμερίζουν το σύνολο των δυνατών τιμών της ϑ σε δύο ξένα υποσύνολοι

→ Αποδοχή της H_0 $\rightleftharpoons$ Απόρριψη H_1

$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$	ή	$H_0 : \vartheta \geq \vartheta_0$	ή	$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$
$H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$		$H_1 : \vartheta < \vartheta_0$		$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$

Έλεγχος ως προς την ισότητα, δηλ. για μορφή

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$$



- Ορίζουμε κριτήριο απόρριψης της H_0 . Για τον σκοπό αυτό :

- καθορίζεται το στατιστικό του ελέγχου, π.χ. δειγματικός μέσος $(\hat{\theta} \triangleq \bar{x})$

- δειγματική διασπορά $(\hat{\theta} = S^2)$

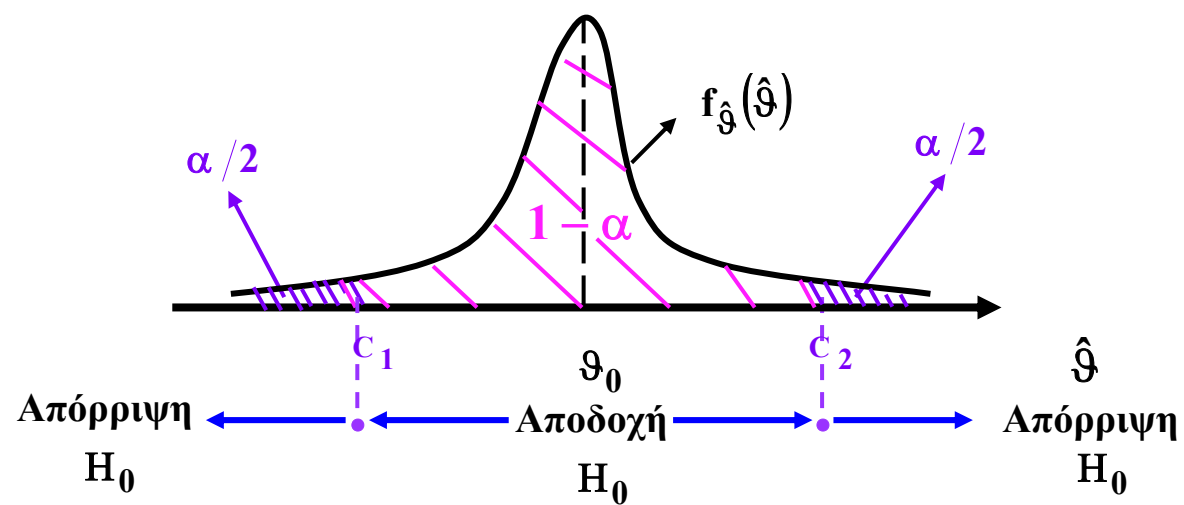
- δειγματική αναλογία $(\hat{\theta} = \hat{p})$

- δειγματικές διαφορές ή αθροίσματα (2 πληθυσμοί)

- επίπεδο σημαντικότητας α του ελέγχου. Οι τιμές (τιμή) του στατιστικού του ελέγχου που αντιστοιχούν στο εκάστοτε επίπεδο εμπιστοσύνης, καλούνται κρίσιμες τιμές και συμβολίζονται με C (**critical values**).

Οι κρίσιμες τιμές προσδιορίζουν τις περιοχές απόρριψης και αποδοχής της H_0 .

α : επίπεδο σημαντικότητας



Κριτήριο :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\vartheta} \leq C_1 = \vartheta_0 - \kappa_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\vartheta}} \\ \hat{\vartheta} \geq C_2 = \vartheta_0 + \kappa_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\vartheta}} \end{array} \right\} \text{Απόρριψη } H_0$$

- Παίρνουμε την απόφαση ως εξής :
 - Δεχόμαστε την H_0 , αν το δείγμα δίνει τιμή $\hat{\theta}$ από την περιοχή αποδοχής
 - Απορρίπτουμε την H_0 , αν το δείγμα οδηγεί σε τιμή $\hat{\theta}$ από την περιοχή απόρριψης

Παράδειγμα

Διαφημιστική εταιρία ενδιαφέρεται για το ποσοστό (αναλογία) νέων κάτω των 18 ετών που παρακολουθεί τις εκπομπές της. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 ($\alpha = 0,05$) η υπόθεση, ότι το ποσοστό είναι $p=0,5$, αν σε τυχαίο δείγμα 250 τηλεθεατών, οι 118 είναι κάτω των 18.

- Δίπλευρος έλεγχος, δεδομένου ότι ενδιαφέρουν αποκλίσεις από το $p = 0,5$ προς κάθε κατεύθυνση

$$\Rightarrow H_0 : p = 0,5 \qquad H_1 : p \neq 0,5$$

$\nwarrow \hat{\theta} \qquad \nearrow \hat{\theta}_0$

- Ως στατιστικό $\hat{g}$ ορίζεται εδώ η δειγματική αναλογία $\hat{p}$

Γνωρίζουμε ότι :

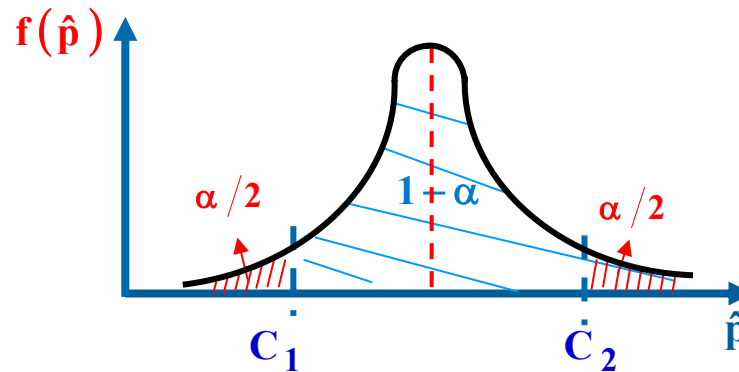
$$\underset{n \rightarrow \infty}{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

αναλογία πληθυσμού

Άρα :

$$\hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right) = N\left(0,5; \frac{0,5^2}{250}\right) = N(0,5; 0,001)$$

εφόσον ο πληθυσμός έχει $p = 0,5$!



Περιοχή αποδοχής $[C_1, C_2]$:

$$C_1 = \vartheta_0 - \kappa_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\Theta}} = 0,5 - \overbrace{\kappa_{0,025}}^{1,96} \cdot \sqrt{0,001} = \underline{0,436}$$

$$C_2 = 0,5 + 1,96 \cdot \sqrt{0,001} = \underline{0,562}$$

→ Περιοχή αποδοχής : $[0,436 ; 0,562]$

Δεδομένου ότι η παρατηρηθείσα δειγματική αναλογία

$$\hat{p} = \frac{118}{250} = \underline{0,472} \quad \text{εντός περιοχής αποδοχής}$$

⇒ H_0 αποδεκτή

- Ποια η πιθανότητα σφάλματος τύπου I ;

$$\alpha = P (\text{Απόρριψη } H_0 / H_0 \text{ ορθή}) = 0,05$$

πιθανότητα σφάλματος τύπου I $\hat{=}$ επίπεδο σημαντικότητας

- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου II του παραπάνω ελέγχου, όταν το πραγματικό ποσοστό του πληθυσμού είναι : 0,4 ; 0,45 ; 0,5 ; 0,55 ; 0,6 ;

$$\beta = P (\text{Αποδοχή } H_0 / H_0 \text{ εσφαλμένη})$$

$$= P (C_1 \leq \hat{p} \leq C_2 \mid p \neq 0,5)$$

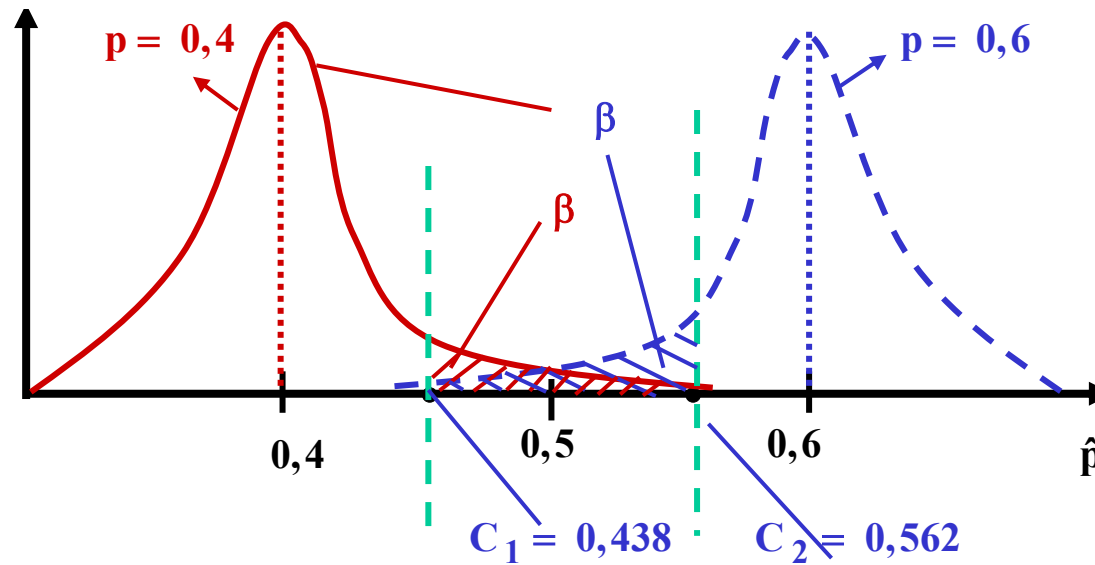
0,436

0,562

$$p = 0,4 \Rightarrow \beta = P (0,438 \leq \hat{p} \leq 0,562 \mid p = 0,4)$$

Τώρα, η δειγματική αναλογία $\hat{p}$ είναι κατανομημένη κατά :

$$N \left(0,4 ; \underbrace{\frac{0,4 \cdot 0,6}{250}}_{9,6 \cdot 10^{-4}} \right)$$

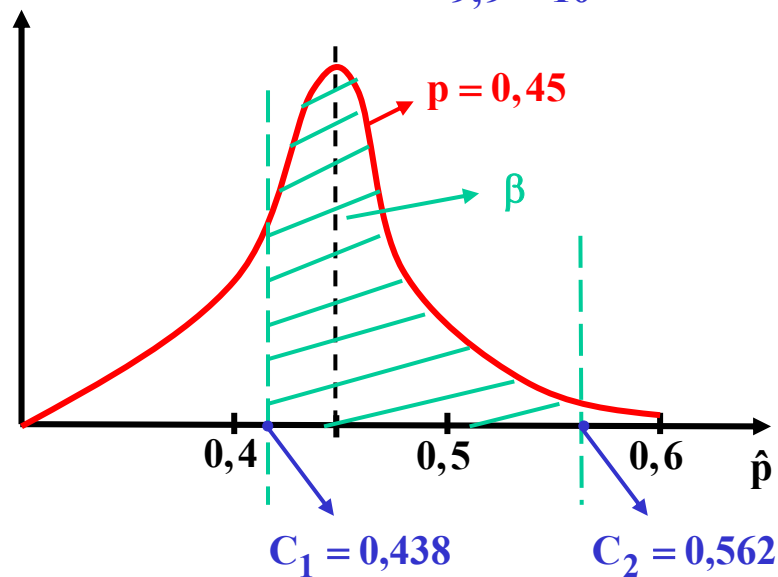


$$\begin{aligned}
 \beta &= P(0,438 \leq \hat{p} \leq 0,562 \mid p = 0,4) = \\
 &= P\left(\frac{0,438 - 0,4}{\sqrt{9,6 \cdot 10^{-4}}} \leq Z \leq \frac{0,562 - 0,4}{\sqrt{9,6 \cdot 10^{-4}}}\right) = \text{τυποποιημένη } \hat{p} \\
 &= P(1,23 \leq Z \leq 5,23) = \underbrace{\phi(5,23)}_1 - \underbrace{\phi(1,23)}_{0,89} = \textcircled{0,11}
 \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, ίδιο αποτέλεσμα για $p = 0,6$

$$\boxed{p = 0,45} \Rightarrow \beta = P(0,438 \leq \hat{p} \leq 0,562 \mid p = 0,45)$$

$$\text{Τώρα : } \hat{p} \sim N\left(0,45 ; \underbrace{\frac{0,45 \cdot 0,55}{250}}_{9,9 \cdot 10^{-4}}\right)$$

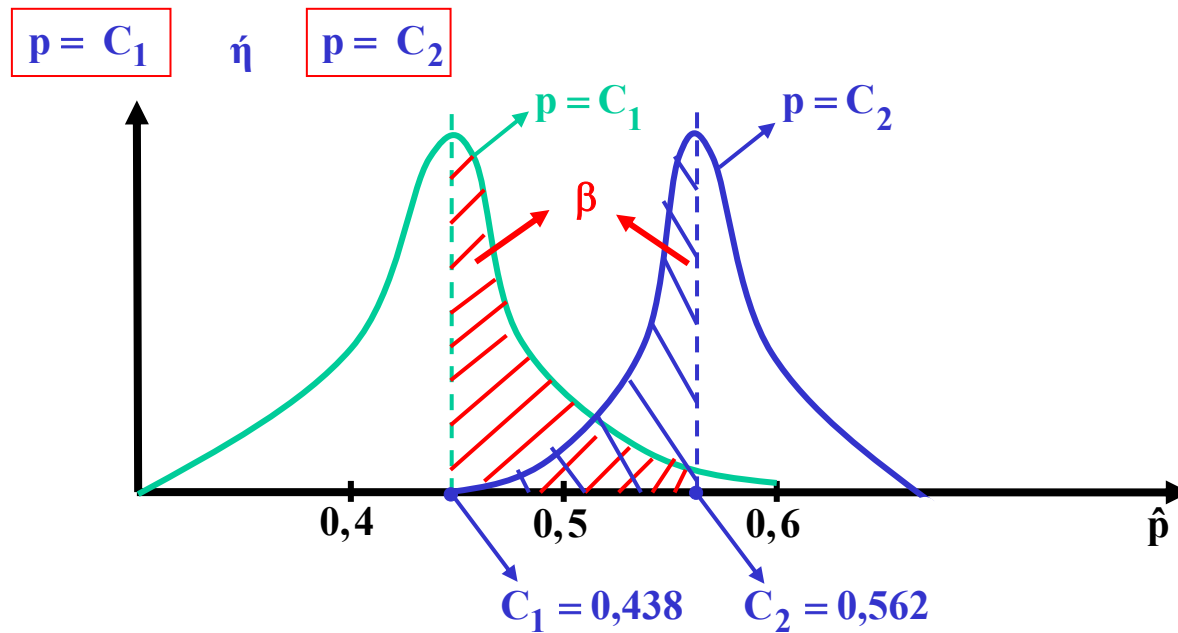


$$\beta = P\left(\frac{0,438 - 0,45}{\sqrt{9,9 \cdot 10^{-4}}} \leq Z \leq \frac{0,562 - 0,45}{\sqrt{9,9 \cdot 10^{-4}}}\right) =$$

$$= P(-0,38 \leq Z \leq 3,5) = \underbrace{\phi(3,5)}_{\approx 1} - \underbrace{\phi(-0,38)}_{1 - \phi(0,38)} = 1 - 1 + 0,65 = 0,65$$

0,65

Λόγω συμμετρίας, ίδιο αποτέλεσμα και για $p = 0,55$



⇒ και στις δύο περιπτώσεις : $\beta \approx 0,5$

$p = 0,5$ $\beta = 0$, δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή, η H_0 είναι ορθή

Όμως, για τιμές του p «πολύ κοντά» στο $0,5$ έχουμε :

$$\beta = P(0,438 \leq \hat{p} \leq 0,562 \mid p \approx 0,5) = 1 - \alpha = 0,95$$



Το λάθος τύπου II για τιμές του πληθυσμού «πολύ κοντά» στην μηδενική υπόθεση είναι μεγάλο και ίσο με $1 - \alpha$

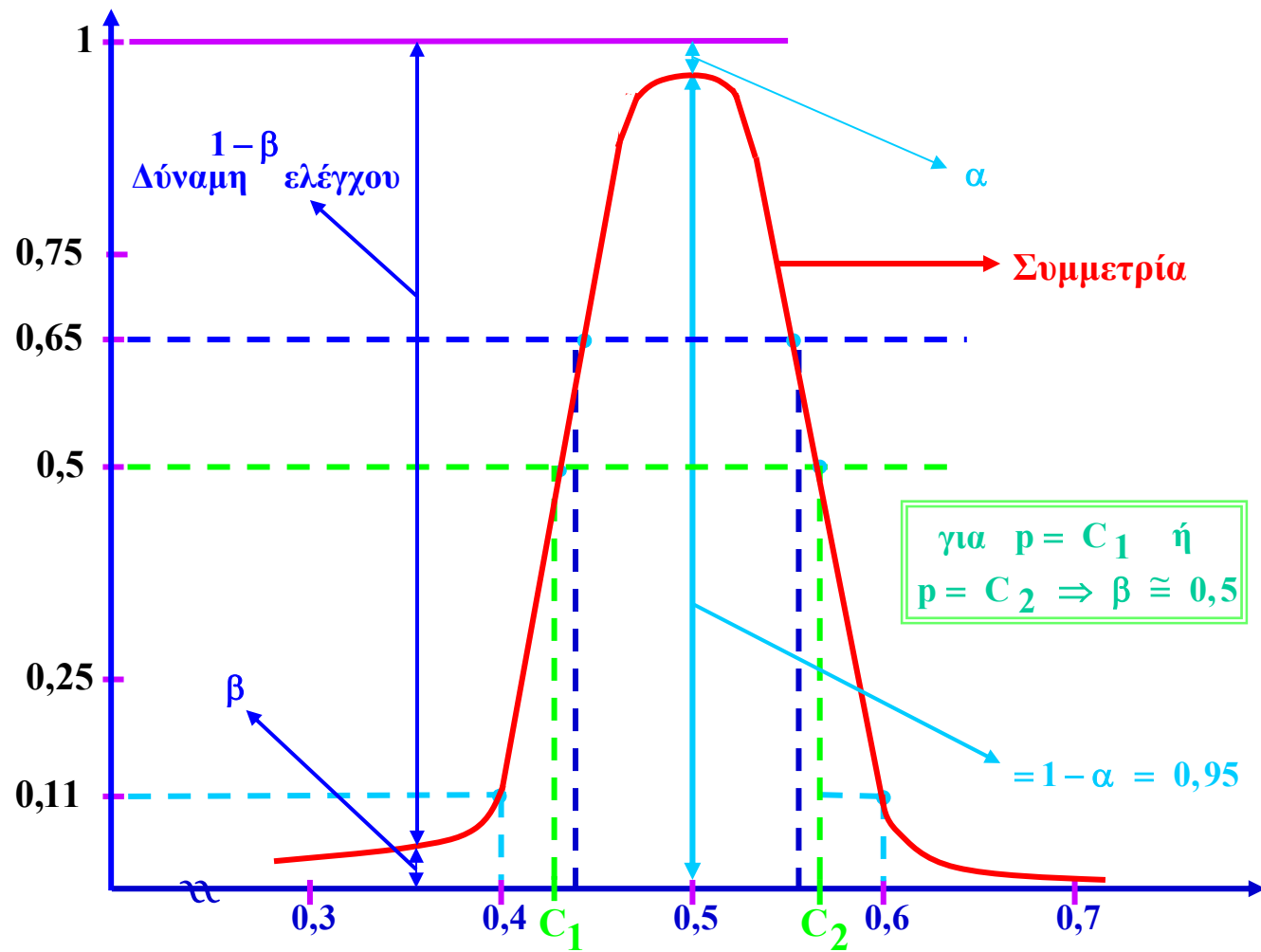
Μείωση του α

(Σφάλμα τύπου I)



Αύξηση του β

(Σφάλμα τύπου II)



■ Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου II για τιμές

μ : 300, 305, 307, 315, 320, 325

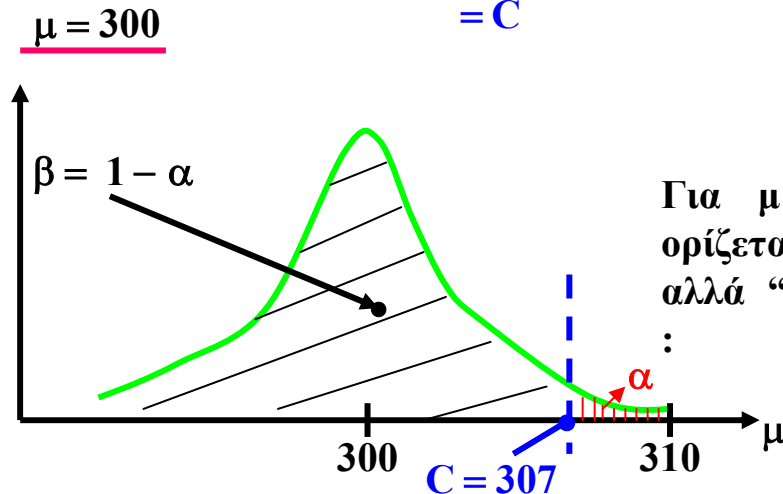
↙
μέση αντοχή της
νέας μεθόδου

δηλ. $\mu > 300$!

Έχουμε :

$$\beta = P(\text{Αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ εσφαλμένη})$$

$$= P(\bar{X} < \underbrace{307}_{=C} \mid \mu > 300) = P\left(Z < \frac{307 - \mu}{3}\right)$$

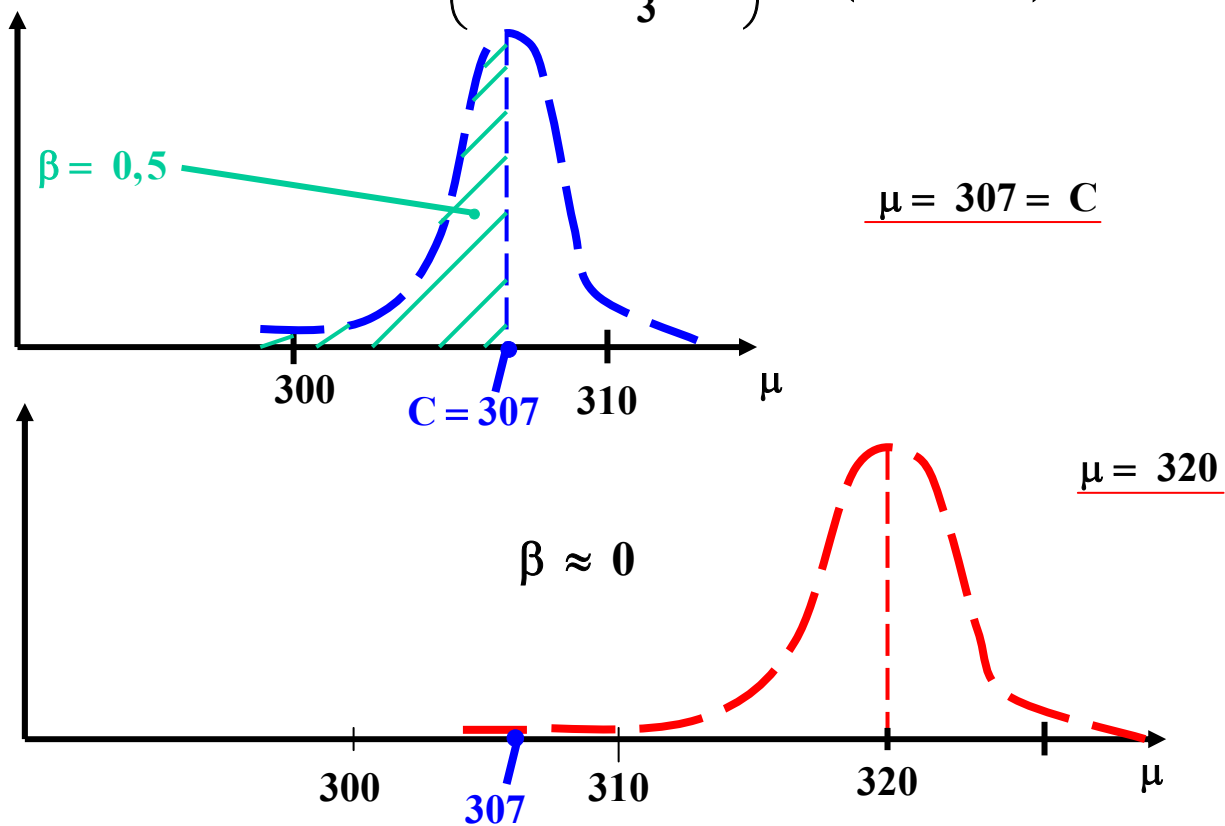


Για $\mu = 300$, το β προφανώς δεν ορίζεται. Για μ όμως $>$ του 300, αλλά “πολύ κοντά” στο 300, έχουμε :

$$\underline{\underline{\beta = 1 - \alpha = 0,99}}$$

Υπολογιστικά :

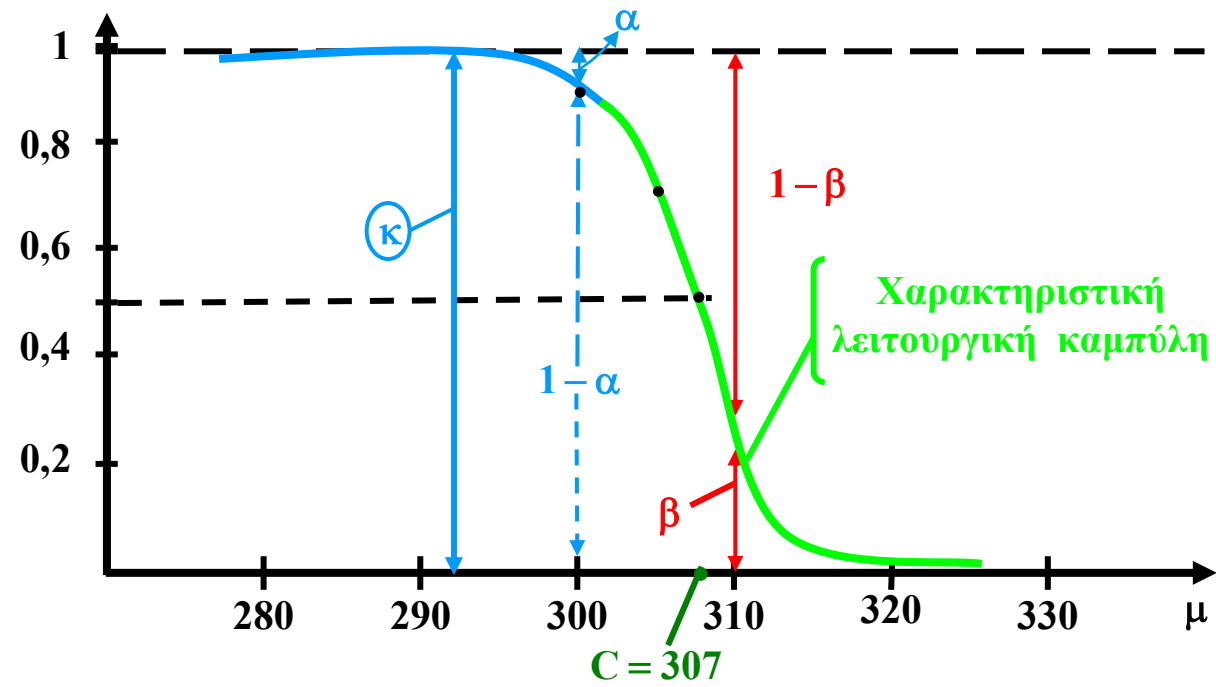
$$\beta = P\left(Z < \frac{307 - 300}{3}\right) = P(Z < 2,33) = 0,99$$



$$\beta = P\left(Z < \frac{307 - 320}{3}\right) = P(Z < -4,3) \approx 0$$

Εύκολα υπολογίζουμε :

μ :	300	305	307	315	320	325
β :	0,99	0,75	0,5	0,004	0	0



Ho ορθή

Ho εσφαλμένη

Παράδειγμα

Η μέση αντοχή καλωδίου είναι $\mu = 300$, η δε τυπική του απόκλιση $\sigma = 24$. Μια νέα μέθοδος κατασκευής έδωσε $\bar{x} = 309$ στα πλαίσια αξιολόγησης δείγματος τάξης 64.

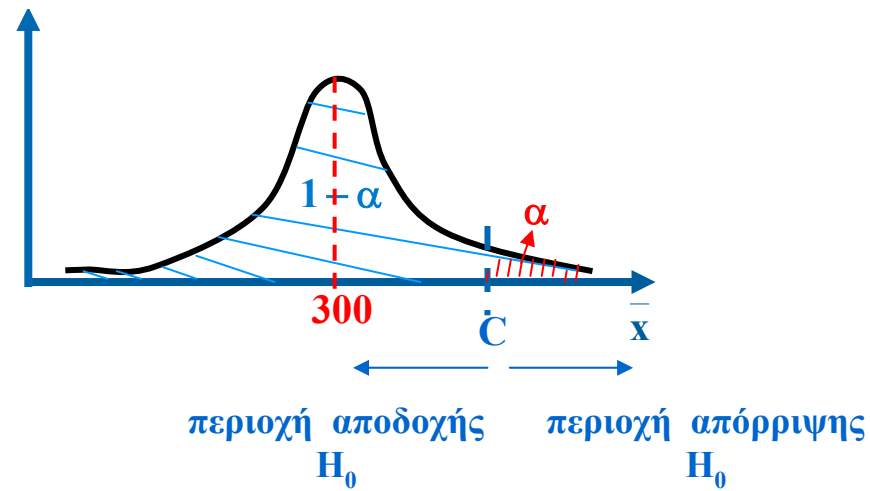
- Αυξάνει τη μέση αντοχή η νέα μέθοδος σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01

- Μονόπλευρος έλεγχος, δεδομένου ότι ενδιαφέρει μόνο μία κατεύθυνση

$$\begin{array}{c} \cong \vartheta \\ \text{H}_0 : \mu \leq 300 \\ \text{H}_1 : \mu > 300 \end{array} \quad \begin{array}{c} \cong \vartheta_0 \end{array}$$

- Ως στατιστικό $\hat{\theta}$ ορίζεται προφανώς η δειγματική μέση τιμή
: $\bar{X}$

! Αν ισχύει η H_0 $\left\{ \begin{array}{l} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(300, \frac{24^2}{64}\right) = N\left(300, 3^2\right) \end{array} \right.$



$$C = \vartheta_0 + \kappa_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\Theta}} = 300 + \underset{=2,33}{\kappa_{0,01}} \cdot 3 = 300 + 2,33 \cdot 3 = 307$$

■ Η παρατηρηθείσα τιμή $\bar{x} = 309$ βρίσκεται εντός περιοχής απόρριψης H_0

☞ Ναι, η νέα μέθοδος είναι καλύτερη

$1 - \beta$: ισχύς ελέγχου, δύναμη του ελέγχου να απορρίπτει
εσφαλμένες H_0

κ : πιθανότητα αποδοχής σωστών H_0 για $\mu < 300$

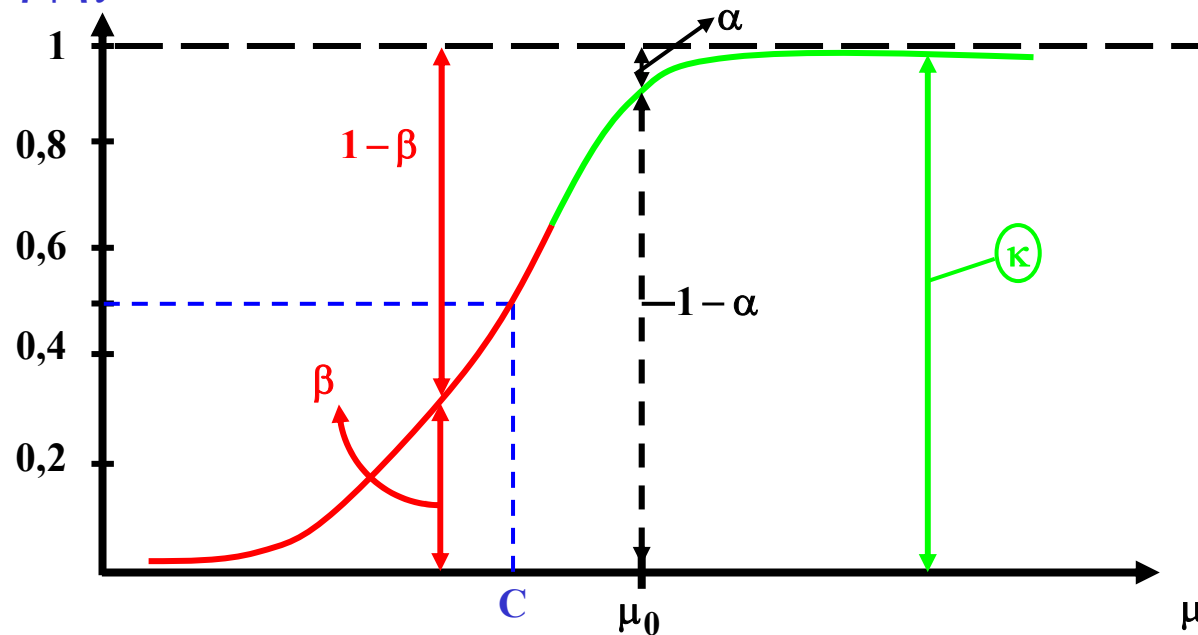
β_α : μέγιστο σφάλμα τύπου I για $\mu=300$.
Για $\mu < 300$, το σφάλμα τύπου I είναι μικρότερο του α

Για μονόπλευρους ελέγχους της μορφής :

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

υπολογίζεται ανάλογα χαρακτηριστική λειτουργική καμπύλη της μορφής :



H_0 λάθος ← | → H_0 ορθή

κ : πιθανότητα αποδοχής σωστών H_0 για $\mu > \mu_0$