# Ασκήσεις στα Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος ΙΙ

Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

### *1. Άσκηση*

***Σύνθετη Διωνυμική***

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $N$ δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \cdots X_N$. Θεωρούμε επίσης ότι οι $X_1, X_2, \cdots X_N$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με μέση τιμή $E(X)$, διασπορά $Var(X)$, και ροπογεννήτρια $M_X(t)$. Για την τυχαία μεταβλητή $N$ δίνεται ότι ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή. Να υπολογιστεί για την συνολική ζημιά $S$, η μέση τιμή, η διακύμανσή της, η ροπογεννήτριά της και η πιθανογεννήτριά της.

***Λύση***

Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Δίνεται ότι

$$N \sim Binomial(n, p)$$

άρα

$$E(N) = n \cdot p$$

$$Var(N) = n \cdot p \cdot q$$

και

$$M_N(t) = \left(q + p \cdot e^t\right)^n$$

$$P_N(t) = (q + p \cdot t)^n$$

Άρα για τη σύνθετη διωνυμική και τη μέση τιμή της $S$ θα είναι

$$E\left[S\right] = E\left[N\right] \cdot E\left[X\right] = n \cdot p \cdot E\left[X\right].$$

Αντίστοιχα για τη διασπορά θα έχουμε

$$Var\left[S\right] = Var\left[X\right] \cdot E\left[N\right] + E^2\left[X\right] \cdot Var\left[N\right] =$$

$$= n \cdot p \cdot \left(E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right]\right) + n \cdot p \cdot q \cdot E^2\left[X\right]$$

$$= n \cdot p\left(E\left[X^2\right] - pE^2\left[X\right]\right)$$

Η ροπογεννήτρια της $S$ θα υπολογιστεί από το γνωστό τύπο και θα είναι

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = P_N(M_X(t)) = \left(q + p \cdot M_X(t)\right)^n$$

Αντίστοιχα η πιθανογεννήτρια της $S$ θα είναι

$$P_S(t) = E[t^S] = P_N(P_X(t)) = \left(q + p \cdot P_X(t)\right)^n$$

**2. Άσκηση**

**Σύνθετη Αρνητική Διωνυμική**

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $N$ δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \cdots X_N$. Θεωρούμε επίσης ότι οι $X_1, X_2, \cdots X_N$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με μέση τιμή $E(X)$, διασπορά $Var(X)$, και ροπογεννήτρια $M_X(t)$. Για την τυχαία μεταβλητή $N$ δίνεται ότι ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική κατανομή. Να υπολογιστεί για την συνολική ζημιά $S$, η μέση τιμή, η διακύμανσή της, η ροπογεννήτριά της και η πιθανογεννήτριά της.

**Λύση**

Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Δίνεται ότι

$$N \sim NegativeBinomial(r, p)$$

και

$$P(N = n) = \binom{r+n-1}{n} \cdot p^r \cdot q^n, n = 0, 1, \cdots$$

$$E(N) = r \cdot \frac{q}{p}$$

$$Var(N) = r \cdot \frac{q}{p^2}$$

και

$$M_N(t) = \left[\frac{p}{1 - q \cdot e^t}\right]^r$$

$$P_N(t) = \left[\frac{p}{1-q\cdot t}\right]^r$$

Άρα για τη σύνθετη αρνητική διωνυμική και τη μέση τιμή της $S$ θα είναι

$$E\left[S\right] = E\left[N\right]\cdot E\left[X\right] = r\cdot\frac{q}{p}\cdot E\left[X\right].$$

Αντίστοιχα για τη διασπορά θα έχουμε

$$Var\left[S\right] = Var\left[X\right]\cdot E\left[N\right] + E^2\left[X\right]\cdot Var\left[N\right] =$$

$$= r\cdot\frac{q}{p}\cdot\left(E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right]\right) + r\cdot\frac{q}{p^2}\cdot E^2\left[X\right]$$

$$= r\cdot\frac{q}{p}E\left[X^2\right] + r\cdot\frac{q^2}{p^2}E^2\left[X\right]$$

Η ροπογεννήτρια της $S$ θα υπολογιστεί από το γνωστό τύπο και θα είναι

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = P_N(M_X(t)) = \left[\frac{p}{1-q\cdot M_X(t)}\right]^r$$

Αντίστοιχα η πιθανογεννήτρια της $S$ θα είναι

$$P_S(t) = E[t^S] = P_N(P_X(t)) = \left[\frac{p}{1-q\cdot P_X(t)}\right]^r$$

### *3. Άσκηση*

### *Σύνθετη Poisson*

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $N$ δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \cdots X_N$. Θεωρούμε επίσης ότι οι $X_1, X_2, \cdots X_N$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες διακριτές τυχαίες μεταβλητές, με μέση τιμή $E(X)$, διασπορά $Var(X)$, και ροπογεννήτρια $M_X(t)$. Θεωρούμε ότι οι $X_i$ λαμβάνουν $m$ τιμές, οι οποίες συμβολίζονται ως

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

και αντίστοιχα το πλήθος των ζημιών όπου η ζημιά είναι ύψους $x_i$ θα συμβολίζεται με

$$N_1, N_2, \cdots, N_m$$

και τα $N_1, N_2, \cdots, N_m$ είναι ανεξάρτητα. Να αποδείξετε ότι η τυχαία μεταβλητή $S$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

είναι ίση και ισόνομη με την

$$S = x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + \cdots + x_m \cdot N_m.$$

### *Λύση*

Θα δείξουμε την ισονομία των δύο εκφράσεων μέσω των ροπογεννητριών τους. Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Δίνεται ότι

$$N \sim Poisson(\lambda)$$

άρα για την $S$ θα έχουμε ότι

$$S \sim CompoundPoisson(\lambda, f_X)$$

και η ροπογεννήτρια της θα είναι ίση με

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = P_N(M_X(t)) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή $S$

$$S = x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + \cdots + x_m \cdot N_m.$$

Η ροπογεννήτρια της $S$ υπολογίζεται ως

$$M_S(t) = E[e^{tS}] =$$

$$E\left[e^{t \cdot [x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + \cdots + x_m \cdot N_m]}\right]$$

$$= E\left[e^{tx_1 N_1}\right] \cdots E\left[e^{tx_m N_m}\right]$$

$$= E\left[e^{(tx_1) N_1}\right] \cdots E\left[e^{(tx_m) N_m}\right]$$

$$= M_{N_1}[tx_1] \cdots M_{N_m}[tx_m]$$

Ισχύει όμως ότι

$$N_i \sim Poisson(\lambda_i = \lambda \cdot P(X = X_i) = \lambda \cdot P_i)$$

συνεπώς

$$M_{N_i}[t] = e^{\lambda_i(e^t-1)}$$

και άρα

$$M_{N_i}[t \cdot x_i] = e^{\lambda_i(e^{t\cdot x_i}-1)}$$

και

$$M_S(t) = M_{N_1}[tx_1]\cdots M_{N_m}[tx_m] =$$

$$= e^{\lambda_1(e^{t\cdot x_1}-1)}\cdots e^{\lambda_m(e^{t\cdot x_m}-1)} =$$

$$= e^{\lambda\cdot P_1(e^{t\cdot x_1}-1)}\cdots e^{\lambda\cdot P_m(e^{t\cdot x_m}-1)} =$$

$$= e^{\left[\lambda\cdot P_1(e^{t\cdot x_1}-1)+\cdots+\lambda\cdot P_m(e^{t\cdot x_m}-1)\right]=}$$

$$= e^{\lambda\cdot\left[P_1(e^{t\cdot x_1}-1)+\cdots+P_m(e^{t\cdot x_m}-1)\right]=}$$

$$= e^{\lambda\cdot\left[P_1e^{t\cdot x_1}-P_1+\cdots+P_me^{t\cdot x_m}-P_m\right]=}$$

$$= e^{\lambda\cdot\left[(P_1e^{t\cdot x_1}+\cdots+P_me^{t\cdot x_m})-(P_1+\cdots+P_m)\right]=}$$

$$= e^{\lambda\cdot(M_X(t)-1)}$$

Συνεπώς καθώς οι ροπογεννήτριες προσδιορίζουν μονοσήμαντα την κατανομή των δύο τυχαίων μεταβλητών, η ισότητα των ροπογεννητριών συνεπάγεται την ισονομία των δύο τυχαίων μεταβλητών.

***4. Άσκηση***

***Σύνθετη Poisson***

Έστω τα ύψη ζημιών

$$x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$$

και τα πλήθη αυτών των ζημιών

$$N_1, N_2, N_3,$$

όπου τα $N_1, N_2, N_3$ είναι ανεξάρτητα και δίνεται ότι

$$N_i \sim Poisson(\lambda_i = i^2).$$

Να υπολογίσετε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$S = -2 \cdot N_1 + 1 \cdot N_2 + 3 \cdot N_m$$

***Λύση***

Με βάση το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $S$

$$S = x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + \cdots + x_m \cdot N_m$$

όπου $m = 3$ είναι ίση και ισόνομη με την

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

όπου

$$N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Επιπλέον η

$$N \sim Poisson(\lambda)$$

όπου

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

άρα για την $S$ θα έχουμε ότι

$$S \sim CompoundPoisson(14, f_X(x))$$

και για την $f_X$ θα είναι

$$f_X(-2) = P(X = -2) = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{1}{14}$$

$$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{4}{14}$$

$$f_X(3) = P(X = 3) = \frac{\lambda_3}{\lambda} = \frac{9}{14}$$

Δηλαδή

| $x$ | -2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{4}{14}$ | $\frac{9}{14}$ |

### 5. *Άσκηση*

***Σύνθεση Δύο Σύνθετων Poisson***

Έστω ότι

$$S_1 \sim CompoundPoisson(\lambda_1 = 2, f_1(x))$$

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 0.2 | 0.6 | 0.2 |

και

$$S_2 \sim CompoundPoisson(\lambda_2 = 6, f_2(x))$$

| $x$ | 3 | 4 |
|---|---|---|
| $f_2(x)$ | 0.5 | 0.5 |

ενώ οι $S_1, S_2$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να υπολογισθεί η κατανομή της

$$S = S_1 + S_2$$

***Λύση***

Για την τυχαία μεταβλητή $S$

$$S = S_1 + S_2$$

ισχύει ότι

$$S \sim CompoundPoisson(\lambda, f_X(x))$$

όπου

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 8,$$

και για την $f_X(x)$ θα είναι

$$f_X(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot f_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} \cdot f_2(x) \Rightarrow$$

$$f_X(x) = \frac{1}{4} \cdot f_1(x) + \frac{3}{4} \cdot f_2(x).$$

Συνεπώς

$$f_X(1) = \frac{1}{4} \cdot f_1(1) + \frac{3}{4} \cdot f_2(1) \Rightarrow$$

$$f_X(1) = \frac{1}{4} \cdot 0.2 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 0.05$$

$$f_X(2) = \frac{1}{4} \cdot f_1(2) + \frac{3}{4} \cdot f_2(2) \Rightarrow$$

$$f_X(2) = \frac{1}{4} \cdot 0.6 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 0.15$$

$$f_X(3) = \frac{1}{4} \cdot f_1(3) + \frac{3}{4} \cdot f_2(3) \Rightarrow$$

$$f_X(3) = \frac{1}{4} \cdot 0.2 + \frac{3}{4} \cdot 0.5 = 0.425$$

$$f_X(4) = \frac{1}{4} \cdot f_1(4) + \frac{3}{4} \cdot f_2(4) \Rightarrow$$

$$f_X(4) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 0.5 = 0.375$$

Δηλαδή

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0.05 | 0.15 | 0.425 | 0.375 |

***6. Άσκηση***

***Ατομικό Πρότυπο***

Θεωρούμε μία πρόσκαιρη ασφάλιση ζωής λόγω θανάτου τέτοια ώστε

| Κλάση $k$ | Αριθμός Ασφαλισμένων $n_k$ | Ασφαλισμένο Κεφάλαιο $b_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 8000 | 1 |
| 2 | 3500 | 2 |
| 3 | 2500 | 3 |
| 4 | 1500 | 5 |
| 5 | 500 | 10 |

Η πιθανότητα απαίτησης για κάθε ένα από τους ασφαλισμένους είναι 2%. Οι κίνδυνοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Η εταιρεία αντασφαλίζεται με όριο ίδιας κράτησης $d = 2$ νομισματικές μονάδες. Η αντασφάλιση κοστίζει 0.025 νομισματικές μονάδες για κάθε νομισματική μονάδα που καλύπτει. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι οι αποζημιώσεις που θα καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρεία συν το κόστος αντασφάλισης θα υπερβαίνουν τις 855 νομισματικές μονάδες.

***Λύση***

Εφαρμόζοντας όριο ίδιας κράτησης $d = 2$ νομισματικές μονάδες θα έχουμε ότι οι αποζημιώσεις που θα καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρεία θα δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

| Κλάση $k$ | Αριθμός Ασφαλισμένων $n_k$ | Ασφαλισμένο Κεφάλαιο $b_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 8000 | 1 |
| 2 | 3500 | 2 |
| 3 | 2500 | 2 |
| 4 | 1500 | 2 |
| 5 | 500 | 2 |

Είναι σαφές ότι ο παραπάνω πίνακας γράφεται σε συνοπτική μορφή ως

| Κλάση $k$ | Αριθμός Ασφαλισμένων $n_k$ | Ασφαλισμένο Κεφάλαιο $b_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 8000 | 1 |
| 2 | 8000 | 2 |

Το συνολικό κεφάλαιο για το οποίο αντασφαλίζεται η ασφαλιστική εταιρεία θα είναι ίσο με

$$2500 \cdot (3-2) + 1500 \cdot (5-2) + 500 \cdot (10-2) = 11000.$$

Συνεπώς το κόστος αντασφάλισης θα είναι ίσο με

$$11000 \cdot 0.025 = 275$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της $S$ από μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της $S$. Έστω $I_j$ η δείκτρια μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή 1, αν δημιουργηθεί απαίτηση από τον $j$ ασφαλισμένο και την τιμή 0, αν δεν δημιουργηθεί απαίτηση από τον $j$ ασφαλισμένο. Είναι προφανές ότι

$$E[I_j] = 1 \cdot P(I_j = 1) + 0 \cdot P(I_j = 0) = P(I_j = 1) = q_j = 0.02$$

και

$$S = \sum_{j=1}^{16000} I_j b_j$$

$$E[S] = E\left[\sum_{j=1}^{16000} I_j \cdot b_j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{16000} E\left[I_j\right] \cdot b_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{16000} q_j \cdot b_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} n_k \cdot q_k \cdot b_k =$$

$$= 8000 \cdot 1 \cdot 0.02 + 8000 \cdot 2 \cdot 0.02 = 160 + 320 = 480$$

Αντίστοιχα για τη διασπορά θα έχουμε:

$$Var[S] = \sum_{j=1}^{16000} Var(X_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{16000} Var(I_j \cdot b_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{16000} b_j^2 \cdot Var(I_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{16000} b_j^2 \cdot q_j \cdot (1 - q_j) =$$

$$= 8000 \cdot 1^2 \cdot 0.02 \cdot 0.98 + 8000 \cdot 2^2 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 156.8 + 627.2 = 784$$

Άρα θα είναι για την πιθανότητα ότι οι αποζημιώσεις $S$ που θα καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρεία συν το κόστος αντασφάλισης (Premium) θα υπερβαίνουν τις 855 νομισματικές μονάδες.

$$P(S + Premium > 825) = P(S > 825 - 275) = P(S > 550) =$$

$$= P(Z > \frac{550 - 480}{\sqrt{784}} = P(Z > 2.5) = 0.062$$

### *7. Άσκηση*

Μια ασφαλιστική εταιρία ζωής ασφαλίζει μια ομάδα ατόμων με ένα πρόγραμμα άμεσης πρόσκαιρης ασφάλισης θανάτου. Δίνεται ότι:

| Κλάση ($k$) | Ύψος Απαίτησης ($b_k$) | Αριθμός Ασφαλισμένων ($n_k$) | Πιθανότητα Απαίτησης ($q_k$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 400 | 0.025 |
| 2 | 4 | 500 | 0.025 |
| 3 | 3 | 500 | 0.020 |
| 4 | 5 | 400 | 0.020 |
| 5 | 4 | 200 | 0.100 |

- αν η τυχαία μεταβλητή $S$ παριστά τις συνολικές αποζημιώσεις των δικαιούχων του ασφαλιστικού προγράμματος να βρεθούν οι αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις καθώς και η τυπική τους απόκλιση.

- αν η ασφαλιστική εταιρία θέσει ένα όριο ιδίας κράτησης ίσο με 4 νομισματικές μονάδες για κάθε ασφαλισμένο να βρεθεί το συνολικό ασφάλιστρο $G$ έτσι ώστε $\Pr(S > G) = 0.05$

### *Λύση*

Θα χρησιμοποιηθεί το ατομικό πρότυπο καθώς ο αριθμός των ασφαλισμένων $n$ είναι δεδομένος και εξετάζεται η περίπτωση ασφάλισης ζωής. Ισχύει ότι

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

ή

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_{2000}$$

καθώς $n = 2000$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} b_j q_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} n_k b_k q_k = 230$$

$$Var(S) = \sum_{j=1}^{n} b_j^2 q_j (1 - q_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} n_k b_k^2 q_k (1 - q_k) = 855$$

Στο δεύτερο ερώτημα έχουμε την εφαρμογή αντασφάλισης με όριο ίδιας κράτησης $d = 4$ νομισματικές μονάδες. Ζητείται το ασφάλιστρο $G$ έτσι ώστε

$$\Pr(S > G) = 0.05$$

$$\Pr\left\{\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{G - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right\} = 0.05$$

Συνεπώς

$$\Pr\left\{Z > \frac{G - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right\} = 0.05,$$

όπου $Z \sim N(0,1)$. Δηλαδή

$$\Pr(Z > Z_{0.05}) = 0.05$$

$$\frac{G - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = Z_{0.05} \Rightarrow G = E(S) + Z_{0.05}\sqrt{Var(S)}$$

και

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} b_j q_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} n_k b_k q_k = 222.$$

$$Var(S) = \sum_{j=1}^{n} b_j^2 q_j (1 - q_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} n_k b_k^2 q_k (1 - q_k) = 784.$$

***8. Άσκηση***

Η πιθανότητα πυρκαγιάς σε κάθε ένα από τα 240 κτίσματα είναι 50%. Το ύψος της ζημιάς αν εκδηλωθεί πυρκαγιά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $(0, c)$ , $c > 0$. Αν οι συνολικές ζημιές είναι $S$ να βρεθεί το διάστημα $(\mu_s - 3\sigma_s, \mu_s + 3\sigma_s)$.

***Λύση***

Γνωρίζουμε ότι για τη δείκτρια τυχαία μεταβλητή της εμφάνισης ή όχι του ασφαλισμένου κινδύνου, ότι είναι για το κάθε $j$ κτίσμα:

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβεί πυρκαγιά στο j κτίσμα} \\ 0, & \text{αν δεν συμβεί πυρκαγιά στο j κτίσμα} \end{cases}$$

Επίσης για το ύψος της απαίτησης δεδομένου ότι θα συμβεί η απαίτηση είναι

$$B_j | I_j = 1 \sim U(0, c)$$

Άρα για τις συνολικές ζημιές θα είναι

$$S = \sum_{j=1}^{n} I_j B_j,$$

όπου $n = 240$. Συνεπώς

$$E\left[S\right] = \sum_{j=1}^{n} q_j \mu_j,$$

Επίσης

$$\mu_j = E\left(B_j | I_j = 1\right) = \frac{c}{2}$$

$$\sigma_j^2 = \frac{c^2}{12}$$

$$q_j = \Pr(I_j = 1) = \frac{1}{2}$$

όπου $q_j$ η πιθανότητα ύπαρξης απαίτησης, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί πυρκαγιά. Συνεπώς

$$\mu_s = E(S) = \sum_{j=1}^{n} q_j \mu_j = n \frac{1}{2} \frac{c}{2} = \frac{nc}{4}$$

και για $n = 240$ έχουμε $\mu_s = 60c$

$$\sigma^2 = Var(S) = \sum_{j=1}^{n} q_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 q_j (1 - q_j)$$

$$= n \frac{1}{2} \frac{c^2}{12} + n \frac{c^2}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{nc^2}{24} + \frac{nc^2}{16} = 25c^2.$$

Συνεπώς θα είναι $(\mu_s - 3\sigma_s, \mu_s + 3\sigma_s) = (45c, 75c)$.