

Ασκήσεις στα Αναλογιστικά Μαθηματικά,
Μέρος Ι

Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

1. Άσκηση

Πιθανογεννήτρια της τ. μ. $N \sim \text{Bernoulli}$

Να δείξετε ότι αν N τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$P_N(z) = q + zp$$

Λύση

Έχουμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την κατανομή Bernoulli τότε παίρνει την τιμή 1 με πιθανότητα p και 0 με πιθανότητα $q = 1 - p$. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$P_N(z) = E[z^N] = z^0 \cdot q + z^1 \cdot p = q + zp.$$

2. Άσκηση

Πιθανογεννήτρια της τ. μ. $N \sim \text{Διωνυμική Κατανομή}$

Να δείξετε ότι αν N τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$P_N(z) = (q + zp)^n$$

Λύση

Έχουμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p τότε

$$P(N = j) = \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot q^{n-j}$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$P_N(z) = E[z^N] = \sum_{j=0}^n P(N = j) \cdot z^j =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot z^j = \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot (zp)^j \cdot q^{n-j} = (q + zp)^n
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει από το διώνυμο του Νεύτωνα

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot \alpha^j \cdot \beta^{n-j} = (\alpha + \beta)^n.$$

3. Άσκηση

Πιθανογεννήτρια της τ. μ. $N \sim$ Κατανομή Poisson

Να δείξετε ότι αν N τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$$

Λύση

Έχουμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , τότε

$$P(N = j) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^j}{j!}$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
P_N(z) &= E[z^N] = \sum_{j=0}^n P(N = j) \cdot z^j = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^j}{j!} \cdot z^j =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot z)^j}{j!} = \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}.
\end{aligned}$$

4. Άσκηση

Πιθανογεννήτρια της τ. μ. $N \sim$ Γεωμετρική Κατανομή

Να δείξετε ότι αν N τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}$$

Λύση

Έχουμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p τότε

$$P(N = j) = p \cdot q^{j-1}$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
P_N(z) &= E[z^N] = \sum_{j=1}^{\infty} P(N = j) \cdot z^j = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p \cdot q^{j-1} \cdot z^j = \\
&= z \cdot p + z^2 \cdot p \cdot q + z^3 \cdot p \cdot q^2 + \dots = \\
&= \frac{pz}{1 - qz}
\end{aligned}$$

5. Άσκηση

Κατιούσα Παραγοντική Ροπή Τάξεως k της τ. μ. $N \sim$ Κατανομή Poisson

Να δείξετε ότι αν N τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή

Poisson με παράμετρο λ , τότε η κατιούσα παραγοντική ροπή τάξεως k της τ. μ. N είναι ίση με λ^k .

Λύση

Έχουμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , τότε

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

Η κατιούσα παραγοντική ροπή τάξεως k της τ. μ. N είναι:

$$\begin{aligned} E[N \cdot (N - 1) \cdots (N - k + 1)] &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot [n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)] = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N = n) \cdot [n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)] = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} [n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)] = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{(n - k)!} = \\ &= e^{-\lambda} \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n - k)!} = \\ &= \lambda^k \end{aligned}$$

Η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης για $k = 1, 2, 3$ μας δίνει

$$E[N] = \lambda$$

$$E[N(N - 1)] = \lambda^2$$

$$E[N(N-1)(N-2)] = \lambda^3.$$

6. Άσκηση

Σχέση Ροπογεννήτριας - Πιθανογεννήτριας

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$P_X(z) = M_X(\ln z)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$M_X(z) = E[e^{zX}]$$

συνεπώς

$$M_X(\ln z) = E[e^{\ln z \cdot X}] = E[[e^{\ln z}]^X] = E[z^X] = P_X(z).$$

7. Άσκηση

Σχέση Ροπογεννήτριας - Μετασχηματισμού Laplace

Ισχύει ότι

$$L_X(z) = M_X(-z)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$M_X(z) = E[e^{zX}]$$

και

$$L_X(z) = E[e^{-zX}]$$

συνεπώς

$$M_X(-z) = E[e^{(-z)X}] = E[e^{-zX}] = L_X(z).$$

8. Άσκηση

Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να δείξετε ότι για το μετασχηματισμό Laplace της $X + Y$ ισχύει ότι:

$$L_{X+Y}(z) = L_X(z) \cdot L_Y(z).$$

Λύση

Πράγματι

$$L_{X+Y}(z) = E[e^{-z(X+Y)}] = E[e^{-zX} \cdot e^{-zY}] = E[e^{-zX}] \cdot E[e^{-zY}] = L_X(z) \cdot L_Y(z).$$

9. Άσκηση

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να δείξετε ότι για την τυχαία μεταβλητή

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

ισχύει ότι έχει μετασχηματισμό Laplace :

$$L_Y(z) = \prod_{i=1}^n L_{X_i}(z).$$

Λύση

Πράγματι

$$\begin{aligned} L_Y(z) &= E[e^{-zY}] = E[e^{-z(X_1+X_2+\dots+X_n)}] = \\ &= E[e^{-zX_1}] \cdot E[e^{-zX_2}] \cdot \dots \cdot E[e^{-zX_n}] = \\ &= L_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot L_{X_n}(z) = \prod_{i=1}^n L_{X_i}(z). \end{aligned}$$

10. **Άσκηση**

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να δείξετε ότι για την τυχαία μεταβλητή

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

ισχύει ότι έχει ροπογεννήτρια:

$$M_Y(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z).$$

Λύση

Πράγματι

$$\begin{aligned} M_Y(z) &= E[e^{zY}] = E[e^{z(X_1+X_2+\dots+X_n)}] = \\ &= E[e^{zX_1}] \cdot E[e^{zX_2}] \cdots E[e^{zX_n}] = \\ &= M_{X_1}(z) \cdots M_{X_n}(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z). \end{aligned}$$

11. **Άσκηση**

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να δείξετε ότι για την τυχαία μεταβλητή

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

ισχύει ότι έχει πιθανογεννήτρια:

$$P_Y(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z).$$

Λύση

Πράγματι

$$\begin{aligned}
 P_Y(z) &= E[z^Y] = E[z^{(X_1+X_2+\dots+X_n)}] = \\
 &= E[z^{X_1}] \cdot E[z^{X_2}] \dots E[z^{X_n}] = \\
 &= P_{X_1}(z) \dots P_{X_n}(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z).
 \end{aligned}$$

12. **Άσκηση****Αθροίσματα Τυχαίων Μεταβλητών - Χρήση Συνελίξεων**

Να ορίσετε την συνέλιξη δύο ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών.

Λύση

Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Η κατανομή του τυχαίου αθροίσματος $S = X + Y$ συμβολίζεται ως

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s)$$

και καλείται η συνέλιξη των X και Y . Η συνάρτηση κατανομής της S υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 F_S(s) &= P(S \leq s) \\
 &= \int P(S \leq s | Y = y) dF_Y(y) \\
 &= \int P(X \leq s - y | Y = y) dF_Y(y) \\
 &= \int F_{X|Y}(s - y | y) dF_Y(y)
 \end{aligned}$$

$$= \int F_X(s-y)dF_Y(y)$$

Συνεπώς η συνάρτηση κατανομής της S θα υπολογίζεται ως:

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int F_X(s-y)dF_Y(y)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της S υπολογίζεται ως:

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int f_X(s-y)dF_Y(y)$$

Αν και η X και η Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές θα έχουμε παραγωγίζοντας ως προς s ότι:

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int f_X(s-y)f_Y(y)dy$$

Αν και η X και η Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές θα έχουμε ότι:

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \sum_y f_X(s-y)f_Y(y)$$

Εφόσον ο τελεστής $*$ πρέπει να έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον τελεστή $+$ θα πρέπει να ισχύει ότι

$$f_X * f_Y = f_Y * f_X$$

και

$$f_X * (f_Y * f_Z) = (f_X * f_Y) * f_Z$$

που σημαίνει ότι τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από τη σειρά με την οποία οι συνελίξεις υπολογίζονται.

Για την πολυμεταβλητή περίπτωση

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

η κατανομή του αθροίσματος μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τις συνελίξεις διαδοχικά στις μεταβλητές υπό οποιαδήποτε σειρά. Συνεπώς αρχίζοντας, χάριν απλότητας, με την $S_1 = X_1$ προχωρούμε διαδοχικά με την

$$S_j = S_{j-1} + X_j$$

για $j = 2, 3, \dots, n$ μέχρι την κατανομή του $S = S_n$, όπου θα έχουμε:

$$F_S(s) = F_{X_1} F_{X_1} * \cdots * F_{X_n}(s)$$

και

$$f_S(s) = f_{X_1} f_{X_1} * \cdots * f_{X_n}(s)$$

Αν οι X_1, X_2, \dots είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ τότε

$$F_S(s) = F_X^{*n}(s)$$

και

$$f_S(s) = f_X^{*n}(s)$$

όπου ο εκθέτης $*n$ δηλώνει τη n -ιστή τάξεως συνέλιξη της X .

13. Άσκηση

$E(S)$ και $V(S)$ στο Μοντέλο Συλλογικού Κινδύνου

Να υπολογίσετε την $E(S)$ και την $V(S)$ κάτω από το μοντέλο συλλογικού κινδύνου.

Λύση

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων και έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή S δηλώνει το συνολικό ύψος των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Παρατηρήστε ότι για $N = 0$ είναι προφανές ότι $S = 0$. Το πλεονέκτημα του συλλογικού μοντέλου είναι ότι είναι αποτελεσματικό υπολογιστικά και επίσης είναι και ρεαλιστικό.

Για την τυχαία μεταβλητή του συνολικού ύψους ζημιών (τυχαία και ως προς το ύψος των ζημιών και ως προς τον αριθμό αυτών) θα έχουμε

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα την μέση τιμή της S .

$$\begin{aligned} E[S] &= E[E[S|N]] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_N)|N = n] \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)] \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nE[X]P(N = n) = \\ &= E[N] \cdot E[X] \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής S .

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= E[\text{Var}[S|N]] + \text{Var}[E[S|N]] = \\ &= E[N \cdot \text{Var}[X]] + \text{Var}[N \cdot E[X]] = \\ &= E[N] \cdot \text{Var}[X] + \text{Var}[N] \cdot [E[X]]^2 \end{aligned}$$

14. Άσκηση

Έστω X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(z)$. Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots . Να υπολογιστεί για την τυχαία μεταβλητή S η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_S(z)$.

Λύση

Για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_S(z)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} M_S(z) &= E[e^{zS}] = E[E[e^{zS}|N]] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{z(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N=n]P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{z(X_1+X_2+\dots+X_n)}]P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [M_X(z)]^n \cdot P(N=n) = \\ &= E \left[[e^{\ln(M_X(z))}]^n \right] = M_N[\ln M_X(z)] = P_N[M_X(z)] \end{aligned}$$

15. **Άσκηση**

Έστω X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_X(z)$. Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots . Να υπολογιστεί για την τυχαία μεταβλητή S η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_S(z)$.

Λύση

Για τη πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_S(z)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} P_S(z) &= E[z^S] = E[E[z^S|N]] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[z^{(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N=n]P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[z^{(X_1+X_2+\dots+X_n)}]P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [P_X(z)]^n \cdot P(N=n) = \\ &= P_N [P_X(z)] \end{aligned}$$

16. **Άσκηση**

Έστω X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και μετασχηματισμό Laplace $L_X(z)$. Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots . Να υπολογιστεί για την τυχαία μεταβλητή S ο μετασχηματισμός Laplace $L_S(z)$.

Λύση

Για το μετασχηματισμό Laplace $L_S(z)$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 L_S(z) &= E[e^{-zS}] = E[E[e^{-zS}|N]] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{-z(X_1+X_2+\dots+X_n)}|N=n]P(N=n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{-z(X_1+X_2+\dots+X_n)}]P(N=n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [L_X(z)]^n \cdot P(N=n) = \\
 &= P_N[L_X(z)]
 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι

$$L_X(z) = M_X(-z)$$

και επίσης έχουμε δείξει ότι

$$M_S(z) = M_N[\ln M_X(z)] = P_N[M_X(z)]$$

συνεπώς έχουμε ότι

$$L_S(z) = M_S(-z) = P_N[M_X(-z)] = P_N[L_X(z)]$$

17. Άσκηση

Σύνθετη Κατανομή Poisson

Έστω X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots . Δίνεται ότι η τ. μ. $N \sim$ Κατανομή Poisson(λ). Να υπολογιστεί για την τυχαία μεταβλητή S η μέση τιμή, η διασπορά, η ροπογεννήτρια, η πιθανογεννήτρια και ο μετασχηματισμός Laplace.

Λύση

Αν η τ. μ. $N \sim$ Κατανομή Poisson(λ) τότε θα είναι

$$E(S) = E(N)E(X) = \lambda \cdot E(X)$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= E[N] \cdot \text{Var}[X] + \text{Var}[N] \cdot [E[X]]^2 = \\ &= \lambda \cdot \text{Var}[X] + \lambda \cdot [E[X]]^2 = \\ &= \lambda \cdot E[X^2]. \end{aligned}$$

Επίσης για τη ροπογεννήτρια θα έχουμε

$$M_S(t) = P_N[M_X(t)] = e^{\lambda[M_X(t)-1]}$$

και για τη πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα είναι

$$P_S(t) = P_N[P_X(t)] = e^{\lambda[P_X(t)-1]}$$

Αντίστοιχα για το μετασχηματισμό Laplace θα είναι

$$L_S(t) = M_S(-t) = P_N[M_X(-t)] = e^{\lambda[M_X(-t)-1]}$$

18. Άσκηση

Αναδρομικός Τύπος του Panjer

Να δείξετε ότι για την κατανομή Poisson ισχύει ο αναδρομικός τύπος του Panjer.

Λύση

Σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο του Panjer, συμβολίζεται ως $R(a, b)$ έχουμε για την τ. μ. N και a και b σταθερές ότι:

$$P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right)P(N = n - 1)$$

για $n = 1, 2, \dots$. Επίσης είναι γνωστό ότι

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

και

$$P(N = n - 1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n-1}}{(n - 1)!}$$

Συνεπώς

$$\frac{P(N = n)}{P(N = n - 1)} = \frac{\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}}{\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n-1}}{(n-1)!}}$$

και άρα

$$\frac{P(N = n)}{P(N = n - 1)} = \frac{\lambda}{n}$$

$$P(N = n) = \frac{\lambda}{n}P(N = n - 1)$$

$$P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right)P(N = n - 1)$$

για $a = 0, b = \lambda, n = 1, 2, \dots$ ενώ για $n = 0$

$$P(N = 0) = e^{-\lambda}$$

19. Άσκηση

Αθροίσματα Τυχαίων Μεταβλητών - Συλλογικό Μοντέλο

Να υπολογίσετε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Λύση

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων και έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων (σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, συνήθως 1 έτος) και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή S δηλώνει το συνολικό ύψος των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Παρατηρήστε ότι για $N = 0$ είναι προφανές ότι $S = 0$. Για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του συνολικού ύψους ζημιών (τυχαία και ως προς το ύψος των ζημιών και ως προς τον αριθμό αυτών) θα έχουμε

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_S(x|N=k) \cdot P(N=k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_1+X_2+\dots+X_N}(x|N=k) \cdot P(N=k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_1+X_2+\dots+X_k}(x) \cdot P(N=k) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_X^{*k}(x) \cdot P(N = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_X^{*k}(x) \cdot P_k.
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να αναλυθεί περισσότερο αν γνωρίζουμε την κατανομή του N και των X_1, X_2, \dots, X_N .

20. Άσκηση

Συνάρτηση Κατανομής Σύνθετης Κατανομής Poisson

Έστω X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots . Δίνεται ότι η τ. μ. $N \sim$ Κατανομή Poisson(λ). Να υπολογιστεί για την τυχαία μεταβλητή S η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας της σύνθετης κατανομής $CP(\lambda, f)$.

Λύση

Αν η τ. μ. $N \sim$ Κατανομή Poisson(λ) τότε θα είναι

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}.$$

Συνεπώς για τη συνάρτηση κατανομής θα είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_X^{*k}(x) \cdot P_k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot F_X^{*k}(x)
\end{aligned}$$

και για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της σύνθετης κατανομής

Poisson θα είναι

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_X^{*k}(x) \cdot P_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot f_X^{*k}(x) \end{aligned}$$

21. Άσκηση

Σύνθεση Σύνθετων Κατανομών Poisson

Έστω S_1, S_2, \dots, S_n ανεξάρτητες που ακολουθούν σύνθετες κατανομές Poisson με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, και με συναρτήσεις κατανομής ζημιών $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$. Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Να δείξετε ότι η S είναι επίσης σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots, \lambda_n$$

και με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x).$$

Λύση

Η παραπάνω απόδειξη θα γίνει κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Για το μετασχηματισμό Laplace, $L_{S_j}(z)$, της κάθε S_j μεταβλητής έχουμε :

$$L_{S_j}(z) = E[e^{-zS_j}] = e^{\lambda_j[L_j(z)-1]}$$

όπου $L_j(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace, που καθορίζει μονοσή-

μαντα την $F_j(x)$. Γνωρίζουμε όμως ότι οι S_1, S_2, \dots, S_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές άρα για το μετασχηματισμό Laplace, $L_S(z)$, της S μεταβλητής θα είναι

$$\begin{aligned}
 L_S(z) &= \prod_{j=1}^n L_{S_j}(z) = \\
 &= \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j[L_j(z)-1]} = \\
 &= e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j[L_j(z)-1]} = \\
 &= e^{\sum_{j=1}^n [\lambda_j L_j(z) - \lambda_j]} = \\
 &= e^{\sum_{j=1}^n [\lambda_j L_j(z)] - \lambda} = \\
 &= e^{\lambda[\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} L_j(z) - 1]} = \\
 &= e^{\lambda[L_X^\diamond(z) - 1]}
 \end{aligned}$$

όπου

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots, \lambda_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

$$L_X^\diamond(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} L_j(z)$$

και συνεπώς

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x).$$

αφού ο μετασχηματισμός Laplace καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή. Το παραπάνω συμπέρασμα είναι αρκετά σημαντικό καθώς επιτρέπει το συνδιασμό διαφορετικών χαρτοφυλακίων Poisson κινδύνων και την μεταχείριση τους συνολικά ως ένα ενιαίο χαρτοφυλάκιο Poisson κινδύνων.

22. Άσκηση

Να δείξετε ότι για την κλάση των κατανομών που ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο του Panjer, έχουμε την ακόλουθη χρήσιμη σχέση για το μετασχηματισμό Laplace της S , της X και των πρώτων παραγώγων αυτών.

$$L'_S(z) = aL_X(z)L'_S(z) + (a + b)L'_X(z)L_S(z)$$

Λύση

Από τον αναδρομικό τύπο του Panjer, έχουμε :

$$P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right)P(N = n - 1)$$

ή

$$P_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)P_{n-1}$$

και συνεπώς

$$n \cdot P_n = a \cdot (n - 1) \cdot P_{n-1} + (a + b) \cdot P_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον όρο

$$[L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$$

παίρνουμε το άθροισμα ως προς n , όπου $n = 1, \dots, \infty$ και έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [a \cdot (n - 1) \cdot P_{n-1} + (a + b) \cdot P_{n-1}] [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$$

ή

$$A = B + C$$

όπου

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z) =$$

$$B = a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot P_{n-1} [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$$

$$C = (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$$

Έχουμε όμως δει ότι

$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X^{*k}(x) \cdot P_k.$$

και

$$L_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [L_X(x)]^k \cdot P_k.$$

και συνεπώς

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z) = L'_S(z)$$

$$B = a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot P_{n-1} [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$$

$$= aL_X(z)L'_S(z)$$

και

$$C = (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$$

$$= (a+b)L'_X(z)L_S(z)$$

23. **Άσκηση**

Να δείξετε ότι για την κλάση των κατανομών που ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο του Panjer, έχουμε την ακόλουθη χρήσιμη αναδρομική σχέση για την κατανομή της S , όπου $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots , και X_1, \dots, X_N , ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

$$f_S(x) = \sum_{j=1}^r \left(a + b \frac{j}{r} \right) \cdot f_X(j) \cdot f_S(r - j).$$

για την περίπτωση όπου τα ύψη ζημιών είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και συνεπώς $r = 1, 2, \dots$.

Λύση

Για την περίπτωση όπου τα ύψη ζημιών είναι μη μηδενικοί ακέραιοι έχουμε ότι συνολικό ύψος των ζημιών θα είναι ίσο με το μηδέν αν δεν συμβεί καμμία ζημιά. Συνεπώς

$$f_S(0) = P(S = 0) = P(N = 0)$$

Ας δούμε τώρα την κατανομή του S για τιμές αυστηρά μεγαλύτερες του μηδενός. Για τους όρους του αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

δηλαδή για τις X_1, X_2, \dots, X_N έχουμε ότι είναι ανεξάρτητες και όμοια καταταμημένες τυχαίες μεταβλητές. Άρα αν το άθροισμα $n + 1$ τέτοιων τυχαίων μεταβλητών είναι ίσο με r θα έχουμε

$$E[X_1 | S_{n+1} = r] = \frac{r}{n + 1}$$

Το ίδιο όμως θα ισχύει για κάθε μία από αυτές, άρα χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής, και τον ορισμό της δεσμευμένης

πιθανότητας θα είναι

$$\begin{aligned}
 E[X_1|S_{n+1} = r] &= E[X_i|S_{n+1} = r] = \\
 &= \sum_x xP(X = x|S_{n+1} = r) = \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^r j \cdot f_X(j) \cdot f_{S_n}(r-j)}{f_{S_{n+1}}(r)} \\
 &= \frac{r}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση έχουμε

$$\frac{\sum_{j=1}^r j \cdot f_X(j) \cdot f_{S_n}(r-j)}{f_{S_{n+1}}(r)} = \frac{r}{n+1}.$$

και

$$\frac{\sum_{j=1}^r j \cdot f_X(j) \cdot f_{S_n}(r-j)}{r} = \frac{f_{S_{n+1}}(r)}{n+1}.$$

Συνεπώς θα έχουμε για το άθροισμα

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^r \left(a + b \frac{j}{r} \right) \cdot f_X(j) \cdot f_S(r-j) = \\
 &= \sum_{j=1}^r \left(a + \frac{bj}{r} \right) \cdot f_X(j) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_{S_n}(r-j)P(N=n) \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^r a \cdot f_X(j) \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_{S_n}(r-j)P(N=n) \right] + \\
 &+ \sum_{j=1}^r b \frac{j}{r} \cdot f_X(j) \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_{S_n}(r-j)P(N=n) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot f_X(j) f_{S_n}(r-j) P(N=n) + \\
&+ \sum_{j=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} b \frac{j}{r} f_X(j) f_{S_n}(r-j) P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r a \cdot f_X(j) f_{S_n}(r-j) P(N=n) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r b \frac{j}{r} f_X(j) f_{S_n}(r-j) P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot P(N=n) \sum_{j=1}^r f_X(j) f_{S_n}(r-j) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot b \sum_{j=1}^r \frac{j}{r} f_X(j) f_{S_n}(r-j) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot P(N=n) f_{S_{n+1}}(r) + \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot P(N=n) \frac{f_{S_{n+1}}(r)}{n+1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n+1} \right) \cdot P(N=n) f_{S_{n+1}}(r) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n+1) f_{S_{n+1}}(r) \\
&= f_S(r)
\end{aligned}$$

24. Άσκηση

Να υπολογίσετε τον αναδρομικό τύπο για την κατανομή του S , όπου $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots , και X_1, \dots, X_N , ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλη-

τές για την περίπτωση όπου η τ. μ. $N \sim$ κατανομή Poisson(λ) και τα ύψη ζημιών είναι μη μηδενικοί ακέραιοι.

Λύση

Για την περίπτωση όπου τα ύψη ζημιών είναι μη μηδενικοί ακέραιοι έχουμε ότι συνολικό ύψος των ζημιών θα είναι ίσο με το μηδέν αν δεν συμβεί καμμία ζημιά. Συνεπώς

$$f_S(0) = P(S = 0) = P(N = 0) = e^{-\lambda}$$

Ας δούμε τώρα την κατανομή του S για τιμές αυστηρά μεγαλύτερες του μηδενός.

$$\begin{aligned} P(S = x) &= \sum_{j=1}^x a + \frac{bj}{x} \cdot f_X(j) f_{S_n}(x - j) = \\ &= \sum_{j=1}^x \frac{\lambda j}{x} \cdot f_X(j) f_{S_n}(x - j) = \\ &= \frac{\lambda}{x} \sum_{j=1}^x j \cdot f_X(j) f_{S_n}(x - j) \end{aligned}$$

25. Άσκηση

Ασφάλιστρο Ανακοπής Ζημίας

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή S δηλώνει το συνολικό ύψος των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Να υπολογιστεί το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας, για όριο ίδιας κράτησης της ασφαλιστικής εταιρείας ίσο με d .

Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει συνολικά το ποσό $\min(S, d)$ αν δηλαδή το συνολικό ύψος ζημιών S είναι μικρότερο από d η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει η ίδια το ποσό S , ενώ αν το συνολικό ύψος ζημιών S είναι μεγαλύτερο από d η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει η ίδια το ποσό d και η αντασφαλίστρια εταιρεία θα πληρώσει το ποσό $S - d$. Άρα η αντασφαλίστρια εταιρεία θα δώσει αποζημίωση ίση με $(S - d)^+$. Συνεπώς το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας I_d θα είναι ίσο με την μέση αποζημίωση που θα καταβάλλει η αντασφαλίστρια εταιρεία και θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_d &= E[(S - d)^+] = \\ &= \int_0^{\infty} (x - d)^+ f_S(x) dx = \\ &= \int_d^{\infty} (x - d)^+ f_S(x) dx = \\ &= \int_d^{\infty} (x - d) f_S(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} (x - d) f_S(x) dx - \int_0^d (x - d) f_S(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} x f_S(x) dx - d \int_0^{\infty} f_S(x) dx - \int_0^d (x - d) f_S(x) dx = \\ &= E[X] - d + \int_0^d (x - d) f_S(x) dx. \end{aligned}$$

26. Άσκηση

Ασφάλιστρο Ανακοπής Ζημίας Μέσω Γραμμικής Παρεμβολής

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανοημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή S δηλώνει το συνολικό ύψος των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Εάν $P(a < S < b) = 0$, και $a \leq d \leq b$, να δείξετε ότι το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας, για όριο ίδιας κράτησης της ασφαλιστικής εταιρείας ίσο με d θα δίνεται από τη σχέση

$$I_d = E[(S - d)^+] = \frac{b - d}{b - a} E[(S - a)^+] + \frac{d - a}{b - a} E[(S - b)^+]$$

Λύση

Από την υπόθεση που δίνεται έχουμε ότι

$$F_S(x) = F_S(a)$$

για $a \leq x < b$. Συνεπώς θα είναι

$$\begin{aligned} I_d &= E[(S - d)^+] = \\ &= \int_d^\infty [1 - F_S(x)] dx = \\ &= \int_a^\infty [1 - F_S(x)] dx - \int_a^d [1 - F_S(x)] dx = \\ &= \int_a^\infty [1 - F_S(x)] dx - \int_a^d [1 - F_S(a)] dx = \end{aligned}$$

$$= E[(S - a)^+] - (d - a)[1 - F_S(a)].$$

Συνεπώς αν θέσουμε $d = b$ στην παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$E[(S - b)^+] = E[(S - a)^+] - (b - a)[1 - F_S(a)].$$

Άρα αν λύσουμε ως προς $1 - F_S(a)$ έχουμε:

$$1 - F_S(a) = \frac{E[(S - a)^+] - E[(S - b)^+]}{b - a}$$

και

$$\begin{aligned} I_d &= E[(S - d)^+] = \\ &= E[(S - a)^+] - (d - a)[1 - F_S(a)] \\ &= E[(S - a)^+] - (d - a)\left[\frac{E[(S - a)^+] - E[(S - b)^+]}{b - a}\right] \end{aligned}$$

27. Άσκηση

Ο αριθμός των ζημιών ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και το μέγεθος της ατομικής ζημιάς είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 4 με αντίστοιχες πιθανότητες 0.8 και 0.2. Να βρεθεί ο συντελεστής επιβάρυνσης θ , έτσι ώστε

$$P(S \leq (1 + \theta)E(S)) = \Phi(\sqrt{\lambda}).$$

Λύση

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή S δηλώνει το συνολικό ύψος των ζημιών του χαρτοφυλακίου.

Έχουμε ότι

$$P(S \leq (1 + \theta)E(S)) = \Phi(\sqrt{\lambda}) \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{(1 + \theta)E(S) - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = \Phi(\sqrt{\lambda}) \Rightarrow$$

$$P\left(Z \leq \frac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = \Phi(\sqrt{\lambda}) \Rightarrow$$

όπου η Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

Άρα

$$\frac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = \sqrt{\lambda} \Rightarrow$$
$$\theta = \sqrt{\lambda} \frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$$

και

$$E(S) = \lambda E(X) = \lambda \cdot 1.6$$

$$Var(S) = \lambda E(X^2) = \lambda \cdot 4$$

και συνεπώς

$$\theta = \sqrt{\lambda} \frac{2\sqrt{\lambda}}{1.6\lambda} = 1.25$$

28. Άσκηση

Μία επιχείρηση συνάπτει με μία ασφαλιστική εταιρεία ένα ομαδικό ασφαλιστήριο συμβόλαιο που καλύπτει νοσοκομειακές δαπάνες για το ετήσιο έλεγχο της κατάστασης της υγείας των υπαλλήλων της. Το νοσοκομειακό ατομικό κόστος για έναν υπάλληλο που εισέρχεται στο νοσοκομείο είναι τ. μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_A(x) = \frac{x-5}{6}, 5 \leq x \leq 11$$

αν είναι άνδρας, ενώ αν πρόκειται για γυναίκα θα είναι

$$F_W(x) = \frac{x-3}{6}, 3 \leq x \leq 9$$

Το ποσοστό των υπαλλήλων ανδρών της επιχείρησης είναι 60%. Η ασφαλιστική εταιρεία ορίζει το ομαδικό ασφάλιστρο να είναι τέτοιο ώστε η πιθανότητα τα συνολικά νοσοκομειακά έξοδα να μην υπερβαίνουν τα ασφάλιστρα να είναι 0.95. Η επιχείρηση για να έχει μία πρώτη εκτίμηση του ασφάλιστρου επιλέγει τυχαία 10 υπαλλήλους για να υποβληθούν σε προληπτικό έλεγχο. Να υπολογιστεί το ομαδικό ασφάλιστρο για την τυχαία επιλεγμένη ομάδα των 10 υπαλλήλων.

Λύση

Δίνεται ότι για τον αριθμό των ανδρών N_A ισχύει ότι $N_A \sim \text{Binomial}(10, 0.6)$ και $N_W \sim \text{Binomial}(10, 0.4)$. Αν συμβολίσουμε με S_A τα συνολικά νοσοκομειακά έξοδα των ανδρών και με S_W τα συνολικά νοσοκομειακά έξοδα των γυναικών θα έχουμε ότι

$$S_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_A}$$

$$S_W = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_W}$$

και

$$S = S_A + S_W = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το συνολικό ασφάλιστρο P έτσι ώστε

$$P(S \leq P) = 0.95 \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{P - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$P\left(Z \leq \frac{P - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = 0.95$$

όπου η Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

Άρα

$$\frac{P - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645 \Rightarrow$$

$$P = E(S) + 1.645 \cdot \sqrt{Var(S)}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το P έχουμε

$$E(S) = E(S_A) + E(S_W)$$

και

$$E(S_A) = E(N_A) \cdot E(X_A) = 6 \cdot 8 = 48$$

$$E(S_W) = E(N_W) \cdot E(X_W) = 4 \cdot 6 = 24$$

Συνεπώς

$$E(S) = E(S_A) + E(S_W) = 72.$$

Ενναλλακτικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E(S) &= E[E(S|N_A)] = \\ &= E[8 \cdot N_A + 6 \cdot (10 - N_A)] = \\ &= 60 + 2 \cdot E[N_A] = 72. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var[E(S|N_A)] + E[Var(S|N_A)] = \\ &= Var[8 \cdot N_A + 6 \cdot (10 - N_A)] + E[3 \cdot N_A + 3 \cdot (10 - N_A)] = \\ &= 4 \cdot Var(N_A) + 30 = 39.6 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$P = 72 + 1.645 \cdot \sqrt{39.6} = 82.38$$

29. Άσκηση

Μία ασφαλιστική εταιρεία καταβάλλει για τη νοσοκομειακή κάλυψη κάθε ασφαλισμένου που εισάγεται στο νοσοκομείο, αποζημιώσεις που αντιστοιχούν στο 100% των χρεώσεων δωματίου και στο 80% των λοιπών χρεώσεων. Οι χρεώσεις του νοσοκομείου δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Χρέωση	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση
Δωματίου	1000	500
Λοιπές	500	300

Η συνδιακύμανση μεταξύ των χρεώσεων δωματίου και των άλλων χρεώσεων είναι ίση με 100.000. Ο αριθμός των εισαγωγών στο νοσοκομείο ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 4. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά των συνολικών αποζημιώσεων κάτω από την υπόθεση του συλλογικού μοντέλου.

Λύση

Οι αποζημιώσεις, X , για την κάθε εισαγωγή στο νοσοκομείο θα είναι ίσες με το άθροισμα των αποζημιώσεων για τις χρεώσεις δωματίου, X_R , συν τις λοιπές χρεώσεις, X_O . Για τη μέση τιμή των αποζημιώσεων κάθε εισαγωγής θα είναι

$$E[X] = E[X_R] + E[X_O] = 1.000 + 0.8 \cdot 500 = 1.400$$

Για τη διασπορά των αποζημιώσεων κάθε εισαγωγής θα είναι

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \text{Var}[X_R] + \text{Var}[X_O] + 2 \cdot \text{Cov}[X_R, X_O] = \\ &= 500^2 + 0.64 \cdot 300^2 + 2 \cdot 0.8 \cdot 100.000 = 467.600 \end{aligned}$$

Συνεπώς για τις συνολικές αποζημιώσεις θα είναι

$$E[S] = E[N] \cdot E[X] = 4 \cdot 1.400 = 5.600$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= E[N] \cdot \text{Var}[X] + \text{Var}[N] \cdot E[X^2] = \\ &= 4 \cdot 467.000 + 4 \cdot 1400^2 = 9.710.400 \end{aligned}$$

30. Άσκηση

Μία ασφαλιστική εταιρεία έχει χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων στον κλάδο αυτοκινήτου που μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις ομοιογενείς ομάδες, όσον αφορά τον αριθμό ατυχημάτων. Ο αριθμός των ατυχημάτων ακολουθεί κατανομή Poisson σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Ομάδα	Πιθανότητα	λ
1	0.25	5
2	0.25	3
3	0.50	2

Να υπολογιστεί η διασπορά του αριθμού των ατυχημάτων για ένα τυχαία επιλεγμένο ασφαλισμένο.

Λύση

Έστω K η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των ατυχημάτων κάθε ασφαλισμένου. Η κατανομή της K θα είναι μία διακριτή μίξη των αντίστοιχων κατανομών Poisson με σταθμίσεις τις πιθανότητες του παραπάνω πίνακα. Για τη διασπορά είναι γνωστό ότι έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Var}[K] &= E[\text{Var}[K|\lambda]] + \text{Var}[E[K|\lambda]] = \\ &= E[\lambda] + \text{Var}[\lambda]. \end{aligned}$$

Αλλά

$$E[\lambda] = 0.25 \cdot 5 + 0.25 \cdot 3 + 0.5 \cdot 2 = 3$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}[\lambda] &= E[\lambda^2] - E^2[\lambda] = \\ &= 0.25 \cdot 25 + 0.25 \cdot 9 + 0.5 \cdot 4 - 9 = 1.5 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\text{Var}[K] = E[\lambda] + \text{Var}[\lambda] = 3 + 1.5 = 4.5$$

31. Άσκηση

Δίνεται για τα ύψη των ζημιών ότι έχουν την παρακάτω κατανομή.

x	P(X=x)
0	0.05
1	0.06
2	0.25
3	0.22
4	0.10
5	0.05
6	0.05
7	0.05
8	0.05
9	0.12

Δίνεται επίσης ότι $E[X] = 4$ και $E[(X - d)^+] = 2$. Να υπολογισθεί το d .

Λύση

Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση των διακριτών κατανομών, όπου η τυχαία μεταβλητή X παίρνει ισαπέχουσες τιμές ισχύει

$$E[(X - d - 1)^+] = E[(X - d)^+] - 1 + F(d)$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$E[(X - 0)^+] = E[X] = 4$$

και

$$E[(X - 1)^+] = E[(X - 0)^+] - 1 + F(0) = 4 - 1 + 0.05 = 3.05$$

$$E[(X - 2)^+] = 3.05 - 1 + 0.11 = 2.16$$

$$E[(X - 3)^+] = 2.16 - 1 + 0.36 = 1.52$$

Άρα, $2 < d < 3$, και με τη χρήση γραμμικής παρεμβολής θα έχουμε

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{E[(X - d)^+] - E[(X - 2)^+]}{d - 2} = \frac{E[(X - 3)^+] - E[(X - 2)^+]}{3 - 2}$$

λύνοντας ως προς d και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$d = 2 + \frac{2 - 2.16}{1.52 - 2.16} = 2.25$$

32. Άσκηση

Ένα χαρτοφυλάκιο παράγει ζημιές, το ύψος των οποίων ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu = 100$ και $\sigma^2 = 9$. Η κατανομή του αριθμού των ατυχημάτων δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

n	Pr(N=n)
0	0.50
1	0.20
2	0.20
3	0.10

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι το συνολικό ύψος ζημιών θα ξεπερνά τις 100 νομισματικές μονάδες.

Λύση

Έχουμε για την S ότι

$$P(S > 100) = \sum_{n=0}^3 Pr(N = n) \cdot Pr(X^{*n} > 100) =$$

$$= 0.5 \cdot 0 + 0.2 \cdot Pr(X > 100) + 0.2 \cdot Pr(X^{*2} > 100) + 0.1 \cdot Pr(X^{*3} > 100).$$

Αλλά

$$X \sim Normal(100, 9) \Rightarrow$$

$$X^{*2} \sim Normal(200, 18) \Rightarrow$$

$$X^{*3} \sim Normal(300, 27).$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} P(S > 100) &= 0.2 \cdot Pr\left(Z > \frac{100 - 100}{3}\right) \\ &+ 0.2 \cdot Pr\left(Z > \frac{100 - 200}{\sqrt{18}}\right) \\ &+ 0.1 \cdot Pr\left(Z > \frac{100 - 300}{\sqrt{27}}\right) = \end{aligned}$$

$$= 0.2 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 1 + 0.10 \cdot 1 = 0.40$$

33. Άσκηση

Ένα χαρτοφυλάκιο παράγει ζημιές, το συνολικό ύψος των οποίων έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_S(x) = 3 \cdot x^{-4}, x \geq 1.$$

Οι τιμές των λ και θ επιλέγονται έτσι ώστε να ισχύει

$$Pr[S \leq (1 + \theta) \cdot E(S)] = Pr[S \leq E(S) + \lambda \cdot \sqrt{\text{var}(S)}] = 0.90$$

Να υπολογιστούν οι τιμές των λ και θ .

Λύση

Έχουμε για την S ότι

$$E(S) = \int_1^{\infty} x \cdot 3 \cdot x^{-4} dx = \frac{3}{2}$$

$$E(S^2) = \int_1^{\infty} x^2 \cdot 3 \cdot x^{-4} dx = 3$$

$$\text{Var}(S) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} Pr[S \leq (1 + \theta) \cdot E(S)] &= \\ &= \int_1^{(1+\theta)\frac{3}{2}} 3 \cdot x^{-4} dx = \\ &= 1 - [1.5(1 + \theta)]^{-3} \end{aligned}$$

Αλλά

$$Pr[S \leq (1 + \theta) \cdot E(S)] = 0.90$$

συνεπώς $\theta = 0.43629$. Επίσης

$$\begin{aligned} Pr[S \leq E(S) + \lambda \cdot \sqrt{var(S)}] &= \\ &= \int_1^{1.5 + \lambda \frac{3}{4}} 3 \cdot x^{-4} dx = \\ &= 1 - \left[1.5 + \lambda \sqrt{\frac{3}{4}} \right]^{-3} \end{aligned}$$

Αλλά

$$Pr[S \leq E(S) + \lambda \cdot \sqrt{var(S)}] = 0.90$$

συνεπώς $\lambda = 0.75568$.

34. Άσκηση

Γεωμετρική - Ομοιόμορφη

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Για την τυχαία μεταβλητή N δίνεται ότι ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή και

$$P_n = P(N = n) = p \cdot q^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Επίσης δίνεται ότι X_i ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Να υπολογιστεί η αναμενόμενη συνολική ζημιά και η διακύμανσή της.

Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Δίνεται ότι

$$N \sim \text{Geometric}(p)$$

και ότι

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1).$$

Για τη μέση τιμή της S θα είναι

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N] \cdot E[X] = \\ &= \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{q}{2p}. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για τη διασπορά θα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= \text{Var}[X] \cdot E[N] + E^2[X] \cdot \text{Var}[N] = \\ &= \frac{1}{12} \frac{q}{p} + \frac{1}{4} \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

35. Άσκηση

Αρνητική Διωνυμική - Εκθετική

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Για την τυχαία μεταβλητή N δίνεται ότι

$$P(N = n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

Επίσης δίνεται ότι X_i ακολουθούν την εκθετική κατανομή με

$$f(x) = e^{-x}.$$

Να υπολογιστεί ροπογεννήτρια της S .

Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Δίνεται ότι

$$P(N = n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

Αν η

$$N \sim \text{NegativeBinomial}(r, p)$$

θα είναι

$$P(N = n) = \binom{r+n-1}{n} \cdot p^r \cdot q^n, n = 0, 1, \dots$$

Για $r = 3$, $p = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \binom{n+2}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = \\ &= \frac{(n+2)!}{n! \cdot 2!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \end{aligned}$$

άρα

$$N \sim \text{NegativeBinomial}(r = 3, p = \frac{1}{2})$$

και

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \left(\frac{p}{1-qt}\right)^r \Rightarrow \\ P_N(t) &= \left(\frac{1}{2-t}\right)^3 \Rightarrow \\ M_S(t) &= P_N(M_X(t)) = \left(\frac{1}{2-M_X(t)}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{1}{2-\frac{1}{1-t}}\right)^3 \Rightarrow \\ M_S(t) &= \left(\frac{1-t}{1-2t}\right)^3 \end{aligned}$$

36. Άσκηση

Συνάρτηση Κατανομής Τυχαίου Άθροίσματος Εκθετικών Τυχαίων Μεταβλητών

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \cdots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \cdots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες δίνεται ότι X_i ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της S .

Λύση

Έστω

$$G_S(x) = P(S \leq x).$$

Γνωρίζουμε ότι

$$G_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F^{*n}(x)$$

όπου

$$F^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x)$$

Αλλά όταν οι

$$X_i \sim \text{Exponential}(\lambda) \Rightarrow$$

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \Rightarrow$$

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x} \Rightarrow$$

$$f_Y(x) = f_X^{*n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}.$$

Συνοπώς

$$\begin{aligned}
1 - F^{*n}(x) &= P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq x) = \\
&= \int_x^\infty f_X^{*n}(y) dy = \\
&= \int_x^\infty f_Y(y) dy = \\
&= \int_x^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot y^{n-1} \cdot e^{-\lambda y} dy = \\
&= -\frac{1}{\lambda} \int_x^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot y^{n-1} \cdot (e^{-\lambda y})' dy = \\
&= -\lambda^{n-1} \left\{ \left[\frac{y^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} \right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{y^{n-2} e^{-\lambda y}}{(n-2)!} dy \right\} = \\
&= \frac{\lambda^{n-1} x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} + \int_x^\infty \frac{\lambda^{n-1} y^{n-2} e^{-\lambda y}}{(n-2)!} dy \Rightarrow \\
1 - F^{*n}(x) &= \frac{\lambda^{n-1} x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} + 1 - F^{*(n-1)}(x) \Rightarrow \\
F^{*n}(x) &= F^{*(n-1)}(x) - \frac{\lambda^{n-1} x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, n \geq 1.
\end{aligned}$$

Άρα θα είναι για κάθε περίπτωση

$$n = 1 \Rightarrow F^{*1}(x) = F^{*(0)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^0}{0!}$$

$$n = 2 \Rightarrow F^{*2}(x) = F^{*(1)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^1}{1!}$$

$$n = 3 \Rightarrow F^{*3}(x) = F^{*(2)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^2}{2!}$$

$$n = n - 1 \Rightarrow F^{*n-1}(x) = F^{*(n-2)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$n = n \Rightarrow F^{*n}(x) = F^{*(n-1)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} F^{*n}(x) &= F^{*(n-1)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= F^{*(n-2)}(x) - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} - e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= F^{*(0)}(x) - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \end{aligned}$$

συνεπώς αντικαθιστώντας έχουμε την αντίστοιχη έκφραση για την $G_S(x)$

$$G_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F^{*n}(x), x > 0.$$

37. Άσκηση

Παράδειγμα Συνάρτησης Κατανομής Τυχαίου Άθροίσματος Εκθετικών Τυχαίων Μεταβλητών

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες δίνεται ότι X_i ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$. Επίσης δίνεται ότι

$$P(N = 0) = P(N = 1) = P(N = 2) = \frac{1}{3}$$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της S .

Λύση

Έστω

$$G_S(x) = P(S \leq x).$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} G_S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n F^{*n}(x) \\ &= \sum_{n=0}^2 P_n F^{*n}(x) \\ &= \sum_{n=0}^2 \frac{1}{3} \left[1 - e^{-x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} \right] \\ &= 1 - e^{-x} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - e^{-x} \left[\frac{1}{3} [1] + \frac{1}{3} [1 + x] \right] \\ &= 1 - \frac{1}{3} e^{-x} [x + 2], x > 0. \end{aligned}$$

38. Άσκηση

Poisson - Bernoulli

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό ατυχημάτων σε ένα έτος και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N . Θεωρούμε επίσης ότι οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Για την τυχαία μεταβλητή N δίνεται ότι $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και για τις X_i δίνεται ότι $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$. Να υπολογιστεί η κατανομή της S .

Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Για την πιθανογεννήτρια της S έχουμε ότι

$$P_S(t) = P_N(P_X(t)) \Rightarrow$$

$$P_S(t) = e^{\lambda \cdot (P_X(t) - 1)}.$$

Αλλά

$$P_X(t) = E[t^X] = \sum_x t^x P(X = x) = q + p \cdot t$$

Συνεπώς

$$P_S(t) = e^{\lambda \cdot (q + p \cdot t - 1)} =$$

$$= e^{\lambda \cdot (p \cdot t - p)}$$

$$= e^{\lambda p(t-1)} \Rightarrow$$

$$S \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot p).$$

Βιβλιογραφία

- [1] Ε. Χατζηκωνσταντινίδης, Αναλογιστικά Μαθηματικά. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις. Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [2] Κ. Κουτσόπουλος, Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία των Κινδύνων, 1999.
- [3] Μ. Ζαζάνης, Αλυσίδες Markov και Δυναμικός Προγραμματισμός, 2005, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθήνας.
- [4] H. Panjer and G. E. Willmot, Insurance Risk Models, Society of Actuaries, 1992.
- [5] P. Boland, Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science, Chapman and Hall, 2007.
- [6] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene and M. Denuit, Modern Actuarial Risk Theory 2002, Springer.
- [7] S. Promislow, Fundamentals of Actuarial Mathematics, 2006, Wiley.