ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1.1 Συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής

***Ορισμός* 1: Συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής**

Μια συνάρτηση ορίζεται όταν συσχετίσουμε κάθε στοιχείο ενός συνόλου D (Domain) με ένα και μόνο στοιχείο ενός συνόλου R (Range) μέσω ενός κανόνα f.

Τα σύνολα D και R ονομάζονται πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης αντίστοιχα.

Βασικές συναρτήσεις & πεδίο ορισμού

$$f(x)=\log x, D(f)=(0,\infty)$$

$$f(x)=\frac{1}{x}, D(f)=R-\{0\}$$

$$f(x)=\sqrt{x}, D(f)=[0,\infty)$$

Αν η συνάρτηση είναι σύνθεση 2 ή παραπάνω συναρτήσεων, τότε το πεδίο ορισμού είναι η τομή των επιμέρους πεδίων ορισμού. Για παράδειγμα

$$f(x)=\frac{\log\sqrt{x}}{x^2-3x+2}, \begin{cases} \sqrt{x}>0 \\ \& \\ x^2-3x+2\neq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x>0 \\ \& \\ x\neq 1, x\neq 2 \end{cases} \sim D(f)=(0,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$$

1.2 Γραμμικές και δευτεροβάθμιες συναρτήσεις.

***Ορισμός 2*: Γραμμική συνάρτηση**

Γενικά μια γραμμική συνάρτηση έχει την μορφή

$$y=ax+b$$

Γεωμετρικά η παράμετρος b εκφράζει την θέση της ευθείας στο επίπεδο ενώ η παράμετρος a την κλίση της ευθείας σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα Ox

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Χαρ. Τρικούπη 45, 10681, Αθήνα, (Μετρό Στάση Πανεπιστήμιο), Τηλ.: 2107780514, 6907495403
email: info@synelixis.net, web: www.synelixis.net

(συγκεκριμένα εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζεται από τον άξονα Ox και την ευθεία).

Παράδειγμα

Εάν γνωρίζουμε την κλίση *a* και ένα σημείο της ευθείας (x_1,y_1) τότε μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας εξισώνοντας την κλίση της ευθείας *a* με την κλίση σε οποιαδήποτε άλλο σημείο της ευθείας (x,y), δηλαδή:

$a = (y - y_1)/(x - x_1)$

Αντίστοιχα αν γνωρίζουμε δυο σημεία της ευθείας (x_1,y_1) και (x_2,y_2) τότε για να υπολογίσουμε την εξίσωση θα πρέπει να βρούμε πρώτα την κλίση της ευθείας $a=(y_2-y_1) / (x_2-x_1)$ και μετά να την αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση.

Ορισμός 3 : **Δευτεροβάθμιες συναρτήσεις**

Η γενική μορφή της δευτεροβάθμιας συνάρτησης είναι:

$y = f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Οι ρίζες της εξίσωσης x_1 και x_2 (δηλαδή οι λύσεις της $f(x)=0$) δίνονται από τον τύπο

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ όπου $a \neq 0$

Εάν $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ οι ρίζες είναι μη πραγματικές

Εάν $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ οι ρίζες είναι πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους.

Εάν $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ υπάρχει μια πραγματική ρίζα.

Είναι γνωστό ότι για τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ισχύει:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ και $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Επίσης εάν $a>0$ τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή (convex function) και έχει ελάχιστο στο σημείο

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

$(x, y) = (-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.

Εάν a<0 τότε η συνάρτηση f είναι κοίλη (concave function) και έχει μέγιστο στο σημείο

$(x, y) = (-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.

Υποσημείωση:

Μια συνάρτηση *f(x)* είναι κυρτή (κοίλη) σε ένα σημείο της *x* εάν ισχύει $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$). Στην περίπτωση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης έχουμε $f''(x)=\alpha$. Επομένως το πρόσημο της παραμέτρου *α* καθορίζει την καμπυλότητα της συνάρτησης και κατά συνέπεια εάν θα έχουμε μέγιστο η ελάχιστο.

SYNELIXIS ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Γεωμετρική έννοια της παραγώγου

Παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο $[\alpha, f(\alpha)]$ είναι η κλίση της εφαπτομένης στο εν λόγω σημείο και συμβολίζεται με $f'(\alpha)$

Η παράγωγος $f'(\alpha)$ της συνάρτησης f στο σημείο α του πεδίου ορισμού της δίνεται από τον τύπο:

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Η γενική μορφή της παραγώγου για οποιοδήποτε σημείο x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η *εξίσωση της εφαπτομένης* της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $[\alpha, f(\alpha)]$ είναι:

$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$ ή μετά τις πράξεις $y = (f(a) - f'(a)\cdot a) + f'(a)\cdot x$

Η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο α, εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, μας δίνει το *στιγμιαίο ή οριακό ρυθμό μεταβολής* της f στο a.
Εναλλακτικός συμβολισμός για την παράγωγο

$\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}$ (προσοχή: δεν πρόκειται για κλάσμα, αλλά για το πηλίκο της μεταβολής df της τιμής της συνάρτησης f προς τη μεταβολή dx της μεταβλητής x από την οποία και προκαλείται). Τα μεγέθη ***df*** και ***dx*** ονομάζονται ***διαφορικά*** της f και της x αντίστοιχα. Έτσι έχουμε τελικά: $df(x) = f'(x).dx$

Η ***δεύτερη παράγωγος*** έχει ως εξής:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

Όριο συνάρτησης

Το όριο της συνάρτησης *f(x)* είναι ο αριθμός Α όταν η x τείνει στο α, εάν η *f(x)* τείνει στο Α καθώς η x τείνει προς το α (αλλά δεν ισούται με αυτό), δηλ.

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$$

Όταν υπολογίζουμε το όριο σε μια περιοχή του α όπου τείνει το x, πρέπει να παίρνουμε τιμές της x και από τις δύο πλευρές, πολύ κοντά στο α.

Κανόνες ορίων

Αν $\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$ και $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \mathrm{B}$

i. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)] = A+B$

ii. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)-g(x)] = A-B$

iii. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)*g(x)] = A*B$

iv. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)/g(x)] = A/B$ (με Β $\neq 0$)

v. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)]^{\alpha/\beta} = A^{\alpha/\beta}$

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κανόνες παραγώγισης

1. Αν $f(x) = A$ (όπου A μια σταθερά) $\Rightarrow f'(x) = 0$
2. Αν $y = Af(x) \Rightarrow y' = Af'(x)$
3. $x' = 1$
4. Αν $f(x) = x^{\alpha} \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
5. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
6. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
7. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $[f(x)^n]' = nf(x)^{n-1}f'(x)$
9. $[e^x]' = e^x$
10. $[\alpha e^{g(x)}]' = \alpha e^{g(x)}g'(x)$
11. $[\log_e x]' = \dfrac{1}{x}$
12. $[\log_e f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
13. $[\log_\alpha x]' = \dfrac{1}{x\ln\alpha}$
14. $[\log_\alpha g(x)]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\ln\alpha}$
15. $\left[\sqrt[\nu]{f(x)^{\mu}}\right]' = \left[f(x)^{\mu/\nu}\right]' = \dfrac{\mu}{\nu} f(x)^{\frac{\mu}{\nu}-1} f'(x)$
16. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
17. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

SYNELIXIS ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σύνθετες συναρτήσεις και παραγώγιση – Αλυσωτός κανόνας

Έστω ότι έχουμε τη σύνθετη συνάρτηση $y = f(u)$ όπου $u = g(x)$, η οποία εναλλακτικά γράφεται και ως $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Αυτό σημαίνει ότι πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση $g(x)$ και μετά επί του αποτελέσματος που

Χαρ. Τρικούπη 45, 10681, Αθήνα, (Μετρό Στάση Πανεπιστήμιο), Τηλ.: 2107780514, 6907495403
email: info@synelixis.net, web: www.synelixis.net

βρήκαμε, εφαρμόζουμε τη συνάρτηση *f*. Μια οποιαδήποτε μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής *x* συνεπάγεται μια μεταβολή στην *u* και κατ' επέκταση μεταβολή της *y* (αλυσωτή αντίδραση). Έτσι έχουμε τον ***αλυσωτό κανόνα***:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Προσοχή να μην γίνεται σύγχυση με το γινόμενο δύο συναρτήσεων της μορφής $f(x)*g(x)$.

Μέθοδος πεπλεγμένης παραγώγισης

Αν δύο μεταβλητές *x* και *y* σχετίζονται με μια εξίσωση, τότε για να βρούμε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς *x* θεωρώντας την *y* ως συνάρτηση του x (χρήση του αλυσωτού κανόνα).
2. Επιλύουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς $\frac{dy}{dx}$.

Αντίστροφες συναρτήσεις και παραγώγιση

Αν η συνάρτηση *f* είναι "ένα προς ένα" στο πεδίο ορισμού της A (και μόνο τότε) και με πεδίο τιμών B, τότε η *f* έχει μια αντίστροφη συνάρτηση *g* με πεδίο ορισμού B και πεδίο τιμών A. Μεταξύ των παραγώγων των αντίστροφων συναρτήσεων *f* και *g* ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$g'[f(x)]*f'(x) = 1$, ή εναλλακτικά

$g'(y) = 1/f'(x)$ όταν $f'(x) \neq 0$

Η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης επιτυγχάνεται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Γράφουμε την εξίσωση, η οποία ορίζει τη συνάρτηση $y = f(x)$.
2. Εναλλάσσουμε τα *x* και *y*, για να προκύψει $x = f(y)$.
3. Επιλύουμε την εξίσωση $x = f(y)$ ως προς *y* σε όρους *x* (αν είναι εφικτό).

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

4. Αν η λύση $y = g(x)$ που προκύπτει είναι μοναδική, τότε η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη συνάρτηση.

Ελαστικότητα

Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής, η οποία οφείλεται σε μια μικρή ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Για τη συνάρτηση $y = f(x)$, η ελαστικότητα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)$$

Η ελαστικότητα είναι ένα αδιάστατο μέγεθος, που δεν εξαρτάται από μονάδες μέτρησης των υπεισερχόμενων μεγεθών. Οι πιο συνηθισμένες μορφές ελαστικότητας στα οικονομικά είναι η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή, η ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα, η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης, η ελαστικότητα προσφοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΥΝΕΧΕΙΣ και ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεώρημα του Bolzano

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορίζεται σε ένα κλειστό πεδίο τιμών $[\alpha,\beta]$, δηλαδή το χ μπορεί να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ α και β συμπεριλαμβανομένων και των δύο ακραίων τιμών α και β, τότε η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του $f(a)$ και του $f(\beta)$, δηλαδή το πεδίο τιμών της είναι το $[f(\alpha),f(\beta)]$

Το παραπάνω θεώρημα χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι η μία συνάρτηση έχει μία ρίζα μεταξύ δύο συγκεκριμένων τιμών.

Υπολογίζουμε το $f(a)$ και το $f(\beta)$. Αν το γινόμενο $f(a).f(\beta)$ είναι αρνητικό, τότε το ένα άκρο του διαστήματος τιμών είναι αρνητικό και το άλλο θετικό. Επομένως το 0 ανήκει στο διάστημα τιμών.

Αύξουσα ή Φθίνουσα συνάρτηση

SYNELIXIS -ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα ορισμού της υπολογίζουμε πρώτα την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$.
Αν η παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι θετική σε ένα διάστημα τότε σε εκείνο το διάστημα ή συνάρτηση είναι αύξουσα
Αντίθετα αν η παράγωγος είναι αρνητική, η συνάρτηση είναι φθίνουσα.
Αν η παράγωγος είναι 0, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στάσιμα σε εκείνο το σημείο (βλέπε επόμενο κεφάλαιο)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η εύρεση των ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης (ελάχιστο ή μέγιστο) ισοδυναμεί με την εύρεση της τιμής (ή των τιμών) της ανεξάρτητης μεταβλητής, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή της.
Η παραγώγιση χρησιμοποιείται προκειμένου να εντοπιστούν και να μετρηθούν τα ακρότατα σημεία μιας συνάρτησης.

Κριτήρια προσδιορισμού ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης $y = f(x)$**:**

Μέγιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ (κριτήριο πρώτης παραγώγου) και

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Ελάχιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ (κριτήριο πρώτης παραγώγου)

και $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Βήματα εύρεσης ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης $y = f(x)$

1. Βρίσκουμε τη συνάρτηση της πρώτης παραγώγου $f'(x)$.

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

2. Θέτουμε την παράγωγο συνάρτηση ίση με μηδέν ($f'(x)=0$) και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει, βρίσκοντας ποιες τιμές του x μηδενίζουν την $f'(x)$.
3. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο, $f''(x)$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση της πρώτης παραγώγου, $f'(x)$.
4. Υπολογίζουμε τις τιμές της δεύτερης παραγώγου για κάθε τιμή του x που βρήκαμε στο βήμα 2 και ελέγχουμε αν είναι θετικές ή αρνητικές.

Ορισμός σημείου καμπής

Αν $f''(x)\geq 0$ τότε η f είναι κυρτή.

Αν $f''(x)\leq 0$ τότε η f είναι κοίλη.

Αν $f''(c)=0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο στο c, τότε το c είναι σημείο καμπής της f (δηλαδή η f αλλάζει από κυρτή σε κοίλη ή το αντίστροφο).

Ακρότατα σε ένα κλειστό διάστημα τιμών [a,b]

Αν ζητείται η εύρεση μέγιστης ή ελάχιστης τιμής μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, και η συνάρτηση δεν παρουσιάζει στάσιμα (δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία όπου $f'(x)=0$)) ή τα στάσιμα δεν είναι ακραία σημεία αλλά είναι σημεία καμπής (δηλαδή $f'(x)=0$ και $f''(x)=0$), τότε το μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στα άκρα του διαστήματος είναι το σημείο $(a, f(a))$ ή το σημείο $(b, f(b))$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αόριστο ολοκλήρωμα

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης *f(x)* είναι **μία άλλη συνάρτηση** *F(x)* τέτοια ώστε η παράγωγος της *F(x)* να είναι η *f(x)*.

Το αόριστο ολοκλήρωμα της *f(x)* συμβολίζεται με $F(x) = \int f(x)dx$

Κανόνες ολοκλήρωσης γνωστών συναρτήσεων

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int x^{-1} dx = \log_e x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e f(x) + c$$

$$\int f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} \frac{1}{f'(x)} f^{n+1}(x) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Ο σταθερός όρος στο αόριστο ολοκλήρωμα

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του ολοκληρώματος περιλαμβάνει πάντα και έναν σταθερό όρο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν η παράγωγος της *F(x)* είναι η *f(x)* δηλαδή $F'(x) = f(x)$ τότε και η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) + C$ είναι επίσης η *f(x)* διότι $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Σε προβλήματα εύρεσης του ολοκληρώματος (π.χ. όταν δίνεται η συνάρτηση του οριακού κόστους και ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους) η τιμή της σταθεράς *C* προσδιορίζεται από κάποια άλλη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης *f(x)* μεταξύ δύο σημείων *a* και *b* είναι **ένας αριθμός** ο οποίος μετρά το εμβαδόν της περιοχής που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης, του άξονα των χ και των δύο κάθετων στον άξονα χ ευθειών *x* =*α* και *x* = *b*.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από $x=a$ μέχρι $x=b$ συμβολίζεται με

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$ όπου F είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή $F'(x)=f(x)$.

Για να βρούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης *f(x)* μεταξύ των σημείων *a* και *b*, βρίσκουμε κατ αρχήν την συνάρτηση του αόριστου ολοκληρώματος *F(x)*. Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα δύο άκρα και αφαιρούμε την τιμή του κάτω άκρου από την τιμή του άνω άκρου. Το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να είναι ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός (όταν η συνάρτηση βρίσκεται κάτω από τον άξονα των χ , παίρνει δηλαδή αρνητικές τιμές το αντίστοιχο εμβαδόν θεωρείται ότι έχει αρνητικό πρόσημο)

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\xi}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$$

SYNELIXIS - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ