Πως βρίσκουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης;

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης, υπάρχουν δύο τρόποι να βρούμε τα ακρότατα (μέγιστα ή/και ελάχιστα) μια συνάρτησης f:

(a) Ο ένας τρόπος είναι μέσω των παραγώγων, δηλαδή

- $f'=0$ και $f''<0$, για τα ελάχιστα, και
- $f'=0$ και $f''>0$, για τα μέγιστα.

Βήματα (βλέπε και παράδειγμα που ακολουθεί)

Α. Πρώτα βρίσκουμε την συνάρτηση της πρώτης παραγώγου.

Β. Θέτουμε την παράγωγο συνάρτηση ίση με μηδέν και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει βρίσκοντας τις τιμές του χ οι οποίες μηδενίζουν την παράγωγο συνάρτηση.

Γ. Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο παραγωγίζοντας την συνάρτηση που βρήκαμε στο Α.

Δ. Υπολογίζουμε τις τιμές της δεύτερης παραγώγου για κάθε μία τιμή του χ που βρήκαμε στο Β και ελέγχουμε αν είναι θετικές ή αρνητικές.

(b) Ο άλλος τρόπος είναι απλώς να υπολογίσουμε μια σειρά από τιμές της f, να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της καμπύλης (x,f(x)), και να δούμε πού βρίσκονται τα ακρότατα.

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x + 1/x$, όπου $x\in\mathbf{R}^*$.

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της $f(x)$.

(a) Αναλυτική λύση, με την παράγωγο:

Η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ είναι:

$$f'(x) = 9{\cdot}x^2 + 2 - 1/x^2$$

Θέτουμε $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 9{\cdot}x^2 + 2 - 1/x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9{\cdot}x^4 + 2{\cdot}x^2 - 1 = 0 \quad (\text{εφόσον ξέρουμε ότι } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 9{\cdot}(x^2)^2 + 2{\cdot}(x^2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9{\cdot}z^2 + 2{\cdot}z - 1 = 0, \quad \text{όπου ορίζουμε } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 9\cdot(-1)}}{2\cdot 9} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = +0,2403 \\ z_2 = -0,4625 \end{cases}$$

Η λύση z_2 είναι αρνητική άρα απορρίπτεται (αφού $z = x^2$ θα πρέπει $z \geq 0$).

Επομένως, $x^2 = z_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{0.2403} \Leftrightarrow x_1 = 0.4902 \approx 0.5$ και $x_2 = -0.4902 \approx -0.5$

Στη συνέχεια πρέπει να ελέγξουμε τη δεύτερη παράγωγο.

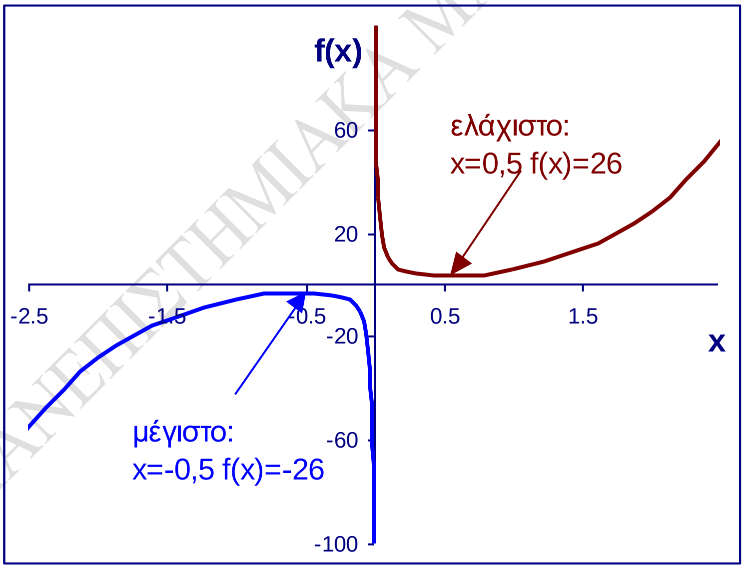
$$f''(x)=18 \cdot x + 2/x^3$$

Στο σημείο x_1: $f''(x_1)= f''(0.4902)=25.81 > 0$ άρα το ακρότατο στο x_1 είναι ελάχιστο.

Στο σημείο x_2: $f''(x_2)= f''(-0.4902)=-25.81 < 0$ άρα το ακρότατο στο x_2 είναι μέγιστο.

(b) Γραφική λύση: Φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών $(x,f(x))$:

x	f(x)
-3	-87
-2	-29
-1	-6
-0.3	-4
-0.1	-10
-0.03	-33
-0.01	-100
-0.005	-200
-0.003	-333
-0.002	-500
-0.001	-1000
3	87
2	29
1	6
0.3	4
0.1	10
0.03	33
0.01	100
0.005	200
0.003	333
0.002	500
0.001	1000



Τα αποτελέσματα των δύο τρόπων πρέπει να <u>συμπίπτουν</u>.

Ακόμα, προφανώς, η γραφική λύση <u>δε</u> συνδέεται καθόλου με τη χρήση παραγώγων.

Σημειώνω ότι <u>αν</u> είχαμε φτιάξει το διάγραμμα της παραγώγου, $(x, f'(x))$, τότε θα βλέπαμε ότι στα σημεία $(x_1, f'(x_1))$ και $(x_2, f'(x_2))$ οι καμπύλες «κόβουν» τον άξονα των x.