

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, u_n = f(n), n = 1, 2, \dots, m$$

Αν $m \rightarrow +\infty$, πρόκειται για ακολουθία άπειρων όρων, διαφορετικά θεωρείται πεπερασμένων όρων (π.χ. $m=100$).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΠΟΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Έστω a_n μια ακολουθία, τότε η a_{n_i} όπου οι δείκτες n_i επιλέγονται σε αύξουσα σειρά από τους δείκτες της ακολουθίας, είναι υποακολουθία της a_n .

ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : |u_n - l| < \varepsilon, \forall n > m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m \in \mathbb{N} : u_n > M, \forall n > m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists m \in \mathbb{N} : u_n < M, \forall n > m$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

- Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \boxed{+} \boxed{-} \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \boxed{+} \boxed{-} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \boxed{+} \boxed{-} \cdot B$$

- Αν $B \neq 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$

- Αν $B=0$, τότε i) αν $A \neq 0$, το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ δεν υπάρχει ii) αν $A=0$, το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ υπάρχει κάτω υπό προϋποθέσεις.

- $p \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = A^p$, αν ο αριθμός A^p υπάρχει.

- $p \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow p^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = p^A$, αν ο αριθμός p^A υπάρχει.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ CAUCHY

Μια ακολουθία συγκλίνει αν $\forall \varepsilon > 0, \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m > N$

ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

- Η a_n είναι κάτω (άνω) φραγμένη $\Leftrightarrow \forall n, \exists m \in \mathbb{Q} : a_n \geq (\leq) m$.
- Η a_n είναι φραγμένη $\Leftrightarrow$ η a_n είναι κάτω και άνω φραγμένη.
- Ο αριθμός m είναι κάτω φράγμα της $a_n \Leftrightarrow a_n \geq m, \forall n$ και επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος της ακολουθίας μικρότερος από $m + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.
- Ο αριθμός M είναι άνω φράγμα της $a_n \Leftrightarrow a_n \leq M, \forall n$ και επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος της ακολουθίας μεγαλύτερος από $M - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.
- Ο αριθμός $\bar{l}$ είναι ανώτερο όριο της a_n ($\limsup$ ή $\overline{\lim}$) $\Leftrightarrow$ υπάρχουν άπειροι σε πλήθος όροι της ακολουθίας μεγαλύτεροι από $\bar{l} - \varepsilon$ αλλά πεπερασμένοι σε πλήθος μεγαλύτεροι από $\bar{l} + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$
- Ο αριθμός $\underline{l}$ είναι κατώτερο όριο της a_n ($\liminf$ ή $\underline{\lim}$) $\Leftrightarrow$ υπάρχουν άπειροι σε πλήθος όροι της ακολουθίας μικρότεροι από $\underline{l} + \varepsilon$ αλλά πεπερασμένοι σε πλήθος μεγαλύτεροι από $\underline{l} - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$
- Αν $\forall M > 0, a_n > M, \forall n$ τότε $\overline{\lim} a_n = +\infty$
- Αν $\forall M < 0, a_n < M, \forall n$ τότε $\overline{\lim} a_n = -\infty$
- Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, τότε $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = +\infty$
- Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, τότε $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = -\infty$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Αν $a_n \leq b_n \leq \gamma_n$, και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = l$, τότε και $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$,

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

- Η a_n είναι φθίνουσα (γνησίως) αν $\forall m < n$ ισχύει $a_m \geq a_n$ ($a_m > a_n$)
- Η a_n είναι αύξουσα (γνησίως) αν $\forall m < n$ ισχύει $a_m \leq a_n$ ($a_m < a_n$)

ΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Είναι τα διαστήματα $[a_n, b_n]_{n=1,2,3,\dots} : \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ και $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq [a_n, b_n]_{n=2,3,4,\dots}$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

- Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη (βλ. άσκηση).
- Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία.

δ) Η υποακολουθία συγκλίνει στο όριο της ακολουθίας από την οποία προκύπτει.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Ναδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, αν $0 < |x| < 1$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε βάσει του ορισμού ότι $\forall \varepsilon > 0, \exists N : |a_n| < \varepsilon, \forall n > N$.

Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$: $|a_n| < \varepsilon \Rightarrow |x^n| < \varepsilon \Rightarrow |x|^n < \varepsilon \Rightarrow \log |x|^n < \log \varepsilon \Rightarrow n \log |x| < \log \varepsilon \Rightarrow$
 $n > \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}$ (γιατί αλλάζει η φορά της ανισότητας?). Πράγματι ο αριθμός $\frac{\log \varepsilon}{\log |x|} = N$
 τεκμηριώνει τη σύγκλιση της ακολουθίας στο μηδέν.

1.2. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μια φραγμένη ακολουθία δεν είναι και απαραίτητα και φραγμένη.

Λύση

Έστω η συγκλίνουσα ακολουθία a_n στον αριθμό l , τότε βάσει ορισμού,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N : |a_n - l| < \varepsilon, \forall n > N$. Ισοδύναμα του $|a_n - l| < \varepsilon$ έχουμε
 $-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία a_n είναι φραγμένη.

Σχετικά με το αντίστροφο, παρατηρείστε ότι η $a_n = \eta \mu n$ φράσσεται στο διάστημα $[-1, 1]$ αλλά δεν συγκλίνει.

1.3. Να υπολογισθούν τα κάτωθι όρια

α) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6}$, β) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, γ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \cdot 10^n}{5 + 3 \cdot 10^n}$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} (3 - \frac{5}{n})}{\cancel{n^2} (5 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{5}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2})} = \frac{3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n}}{5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2}} = \\ &= \frac{3}{5}, \text{ διότι } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2} = 0. \text{ Πράγματι ισχύει } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = \frac{5}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{5}{+\infty} = 0, \text{ και} \end{aligned}$$

όμοια για τα υπόλοιπα μηδενικά όρια.

$$\beta) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$$

$$\gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{10^n} \left(\frac{1}{10^n} + 2 \right)}{\cancel{10^n} \left(\frac{5}{10^n} + 3 \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{10^n} + 3 \right)} = \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}$$

1.4. Έστω ακολουθία a_n τέτοια ώστε $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, $a_1 = 1$. Ναδειχθεί ότι το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ υπάρχει και κατόπιν να υπολογισθεί.

Λύση

Δείχνουμε επαγωγικά ότι $a_n = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}$. Ο εκθέτης είναι άθροισμα (n-1) όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{2}$, άρα ίσος με

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ άρα και } a_n = 3^{1 - \frac{1}{2^n}} < 3, \text{ που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι άνω}$$

φραγμένη από τον αριθμό 3.

Παρατηρούμε επίσης ότι $a_{n+1} > \sqrt{3a_n}$, που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι μονότονη (γνησίως) και βέβαια κάτω φραγμένη από τον αριθμό 1.

Εφόσον είναι μονότονη και φραγμένη ακολουθία άρα και συγκλίνει.

Σχετικά με το όριο της ακολουθίας έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{1 - \frac{1}{2^n}} = 3^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^n})} = 3^{1-0} = 3$

1.5. Αν $a_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+n}$, δείξτε ότι το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ υπάρχει και βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$.

Λύση

Δείχνουμε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα (επαγωγικά), οπότε και $a_n > a_1 \forall n > 1$.

Επίσης, $a_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n = 1$, άρα η ακολουθία είναι

γνησίως μονότονη και φραγμένη, οπότε και συγκλίνει. Εφόσον το τελευταίο, τότε το όριο της θα ανήκει στο διάστημα το οποίο την φράσσει, δηλαδή το $(\frac{1}{2}, 1)$.

1.6. Εξετάστε την μονοτονία και σύγκλιση της ακολουθίας $a_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Λύση

$a_1 = 3, a_2 = \frac{9}{2}, a_3 = \frac{11}{3}$, και παρατηρούμε ότι $a_1 < a_2, a_2 > a_3$, οπότε η ακολουθία δεν είναι μονότονη.

Συγκλίνει όμως διότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 + \frac{(-1)^n}{n}) = 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 4$, διότι, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$: $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ το οποίο ισχύει για $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1.7 Δείξτε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ είναι μονότονα φθίνουσα, φραγμένη και να υπολογισθεί το όριό της.

1.8 Αν $a_n = \sqrt{a_{n+1}}, a_1 = 1$, να υπολογισθεί το όριο της.

1.9 Να υπολογισθεί το $a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n-4}}, b) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{1/n}, \gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} (a+n)^{\frac{p}{n}}$

1.10 Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |a| < 1$, να δειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

1.11 Δείξτε ότι αν $a_n \geq b_n$, τότε και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ εφόσον υπάρχουν τα όρια αυτά.